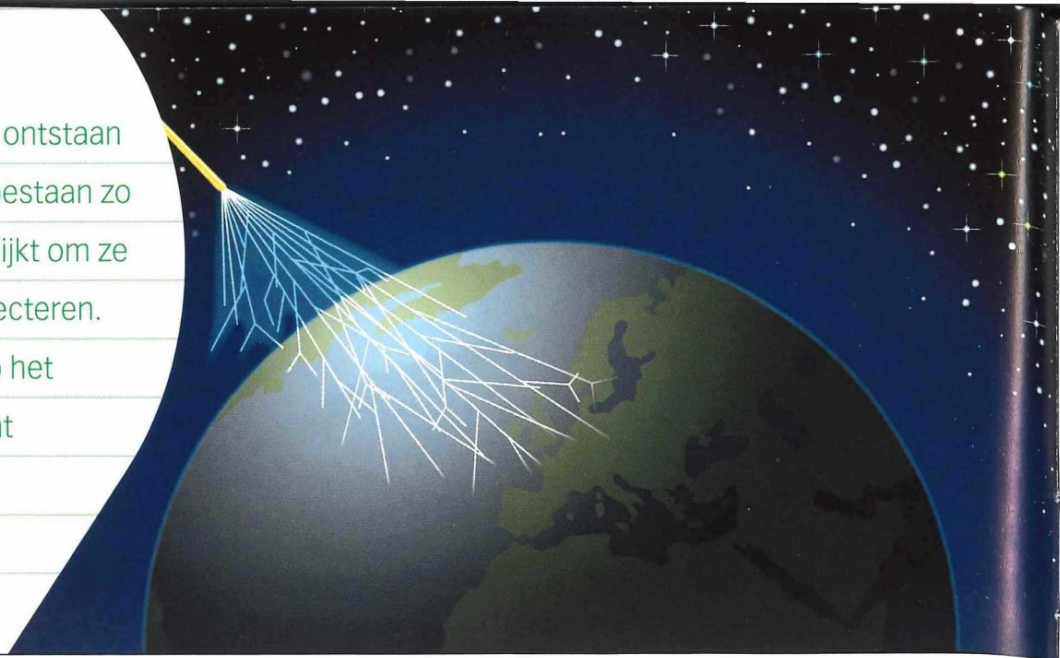


Bovenin onze atmosfeer ontstaan muonen. Deze deeltjes bestaan zo kort, dat het onmogelijk lijkt om ze nog op zeeniveau te detecteren. Toch meet je muonen op het aardoppervlak. Hoe is dat mogelijk?



Figuur D.1

D.1 Tijdrek en lengtekrimp

Referentiestelsel

Wanneer een trein jou passeert, zeg je dat de trein beweegt ten opzichte van jou. Jij ziet alle bewegingen in een stelsel waarvan jij het middelpunt bent. Zo'n stelsel noem je een **referentiestelsel**. In dit voorbeeld legt de trein in jouw referentiestelsel een bepaalde afstand af in een bepaalde tijd.

Voor een passagier in de trein beweeg jij ten opzichte van de trein. In het referentiestelsel van de passagier ben jij degene die een bepaalde afstand in een bepaalde tijd aflegt. In de volgende paragraaf lees je meer over referentiestelsels.

Speciale relativiteitstheorie

Als twee waarnemers ten opzichte van elkaar bewegen, nemen ze voor hetzelfde proces een verschillende tijd en afstand waar. De enige waarneming die overeenkomt is de snelheid van het licht. Deze heeft voor elke waarnemer overal in de ruimte dezelfde waarde: $c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s. Afgerond: $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s. De ruimte en de tijd zijn aan elkaar gekoppeld en vormen samen de **ruimtetijd**.

Muonen ontstaan bovenin de atmosfeer door botsingen van deeltjes uit de ruimte met moleculen in de atmosfeer. Een muon heeft een gemiddelde levensduur van maar 2,2 microseconde en beweegt met bijna de lichtsnelheid. Een muon kan dus maximaal een afstand afleggen van $x = c \cdot t = 3,0 \cdot 10^8 \times 2,2 \cdot 10^{-6} = 660$ meter. De atmosfeer is 10 km dik. Muonen zouden dus op het oppervlak van de aarde niet waargenomen kunnen worden.

De klassieke mechanica van Newton werkt hier kennelijk niet. Einsteins **speciale relativiteitstheorie** verklaart het waarnemen van de muonen wel. Einstein stelt dat

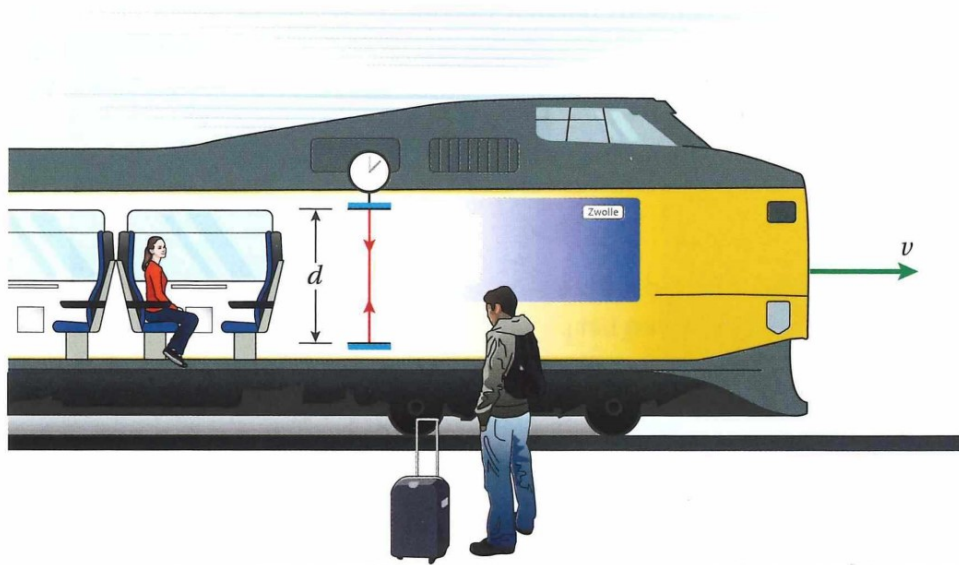
de afstanden in het referentiestelsel van de muonen zijn gekrompen ten opzichte van die in het referentiestelsel van een waarnemer op aarde. Tegelijkertijd is de tijd gerekt in het referentiestelsel van de waarnemers op aarde ten opzichte van die in het referentiestelsel van de muonen. De afstanden en tijden in het referentiestelsel van de muonen en in het referentiestelsel van de waarnemers op aarde komen dus niet meer overeen. De theorie heet 'speciaal' omdat hij enkel werkt voor referentiestelsels die eenparig ten opzichte van elkaar bewegen. De **algemene relativiteitstheorie** beschrijft ook versnelde bewegingen en het effect van de zwaartekracht op de ruimtetijd.

Tijdrek

Licht kun je opgebouwd denken uit deeltjes die bewegen met de lichtsnelheid. Deze deeltjes noem je **fotonen**. Een **lichtklok** bestaat uit twee spiegels waartussen een foton heen en weer beweegt. De tijd die een foton nodig heeft om van de ene spiegel naar de andere en weer terug te bewegen is de periode T .

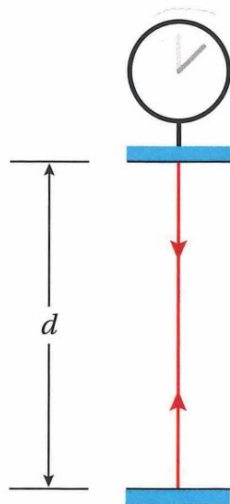
Anita zit in een trein naast de lichtklok, terwijl de trein Bruce voorbij rijdt.

Zie figuur D.2.

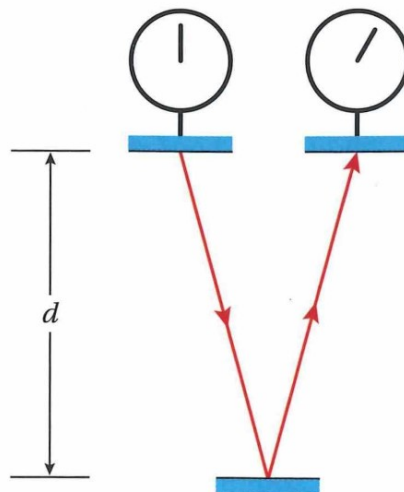


Figuur D.2

Anita ziet gedurende een periode de lichtklok zoals in figuur D.3. Bruce ziet de lichtklok dan zoals in figuur D.4. Voor Anita en Bruce beweegt het foton met dezelfde snelheid, namelijk de lichtsnelheid. Volgens Anita legt het foton gedurende één periode de afstand $2d$ af. Volgens Bruce is deze afstand dus groter dan $2d$. Als ze allebei met behulp van de lichtsnelheid de periode T berekenen, is de periode die Bruce berekent groter dan de periode die Anita berekent. Volgens Bruce doet het foton er dus langer over om tussen de twee spiegels heen en weer te bewegen dan volgens Anita. Kortom: een proces in een stelsel dat beweegt ten opzichte van jou, duurt voor jou langer dan voor een waarnemer in dat stelsel zelf. Dit verschijnsel noem je **tijdrek**.



Figuur D.3



Figuur D.4

Het referentiestelsel van de lichtklok noem je het **ruststelsel**. Anita bevindt zich dus in het ruststelsel van de klok omdat zij in rust is ten opzichte van de klok. De tijd in het referentiestelsel van Bruce is gerekt ten opzichte van de tijd in het ruststelsel. Je berekent de tijdrek met:

$$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$$

- Δt_b is de tijd van een proces in s, die een waarnemer meet als hij beweegt ten opzichte van het ruststelsel van het proces.
- Δt_e is de eigentijd van een proces in s, die een waarnemer meet als hij zich in het ruststelsel van het proces bevindt.
- γ is de relativistische factor en heeft geen eenheid.

De **relativistische factor** γ is altijd groter of gelijk aan 1. Er geldt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- v is de snelheid in m/s.
- c is de lichtsnelheid in m/s.

Dat je muonen detecteert op het aardoppervlak, terwijl ze maar 2,2 microseconde leven in hun ruststelsel, is een gevolg van tijdrek. De relativistische factor van een muon dat met een snelheid van 99,9% van de lichtsnelheid beweegt is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,999c)^2}{c^2}}} = 22,4$$

In het ruststelsel van het muon leeft het muon 2,2 microseconde. In ons stelsel leeft het muon dan:

$$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e = 22,4 \times 4,9 \cdot 10^{-6} = 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

In die tijd verplaatst het muon zich over een afstand van:

$$s = v \cdot t = 0,999 \times 2,998 \cdot 10^8 \times 4,9 \cdot 10^{-5} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ m} = 15 \text{ km}$$

De muonen kunnen dus de atmosfeer met een dikte van 10 km doorkomen.

Lengtekrimp

De tijd die twee waarnemers meten hangt af van hun referentiestelsel. Ook afstanden in de bewegingsrichting hangen af van het referentiestelsel van een waarnemer. In figuur D.5a zie je een laptop als die laptop stil staat ten opzichte van jou. In figuur D.5b zie je de laptop overdreven weergegeven als die ten opzichte van jou naar links of naar rechts beweegt. Een voorwerp dat ten opzichte van jou beweegt, neem je smaller waar. Dit verschijnsel heet **lengtekrimp**.

Deze lengtekrimp geldt alleen voor de richting waarin het voorwerp beweegt. Daarom is de breedte kleiner maar de hoogte niet.



Figuur D.5

a

b

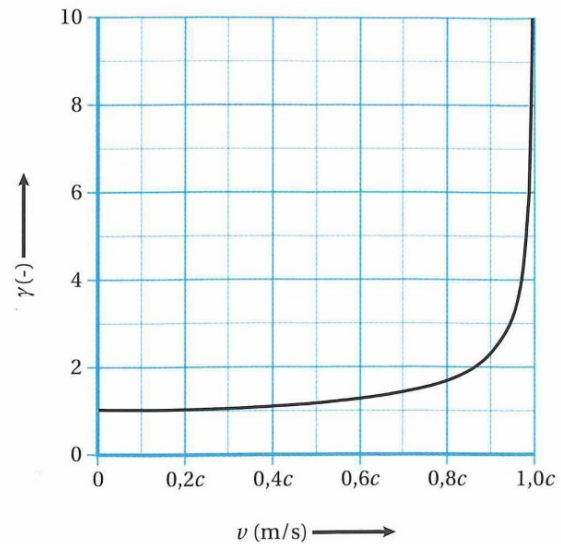
De lengte in het bewegende stelsel bereken je met:

$$l_b = \frac{l_e}{\gamma}$$

- l_b is de lengte in m die een waarnemer meet als hij beweegt ten opzichte van het ruststelsel van het voorwerp.
- l_e is de eigenlengte in m die een waarnemer meet als hij zich in het ruststelsel van het voorwerp bevindt.
- γ is de relativistische factor en heeft zoals gezegd geen eenheid.

Opmerking

Figuur D.5 is sterk overdreven: de relativistische factor γ is bijna gelijk aan 1 bij snelheden lager dan $0,25c$. Zie figuur D.6.



Figuur D.6

Voorbeeld

Astronaut Buzz reist met 80% van de lichtsnelheid naar de ster Proxima Centauri. Proxima Centauri staat op $4,0 \cdot 10^{16}$ m van de aarde. Zijn zus Lola neemt de reis vanaf de aarde waar.

- Toon aan dat de reis volgens Lola 5,3 jaar duurt.
- Bereken hoe groot de afstand tussen de aarde en Proxima Centauri is volgens Buzz.
- Bereken hoe lang de reis duurt volgens Buzz.

Uitwerking

- Lola is in rust ten opzichte van de aarde en Proxima Centauri. Zij neemt de eigenlengte ℓ_e van de afstand tussen de aarde en Proxima Centauri waar.

Haar waargenomen tijd is Δt_{Lola}

$$s = v \cdot t$$

$$\ell_e = v \cdot \Delta t_{\text{Lola}}$$

$$\ell_e = 4,0 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

$$v = 0,80 \times 3,0 \cdot 10^8 = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$4,0 \cdot 10^{16} = 2,4 \cdot 10^8 \times \Delta t_{\text{Lola}}$$

$$\Delta t_{\text{Lola}} = 1,7 \cdot 10^8 \text{ s} = 5,3 \text{ jaar}$$

- Buzz beweegt ten opzichte van de aarde en Proxima Centauri. De afstand aarde-Proxima Centauri is in het referentiestelsel van Buzz gekrompen. Voor de lengte-krimp geldt:

$$\ell_b = \frac{\ell_e}{\gamma} \text{ met } \ell_e = 4,0 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

De relativistische factor is

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,80c)^2}{c^2}}} = 1,67$$

$$\ell_b = \frac{4,0 \cdot 10^{16}}{1,67} = 2,4 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

- c Buzz is in beweging ten opzichte van de aarde en Proxima Centauri. Hij neemt de lengte ℓ_b en de tijd Δt_{Buzz} waar.

$$s = v \cdot t$$

$$\ell_b = v \cdot \Delta t_{\text{Buzz}}$$

$$\ell_b = 2,4 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

$$v = 0,80 \times 3,0 \cdot 10^8 = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$2,4 \cdot 10^{16} = 2,4 \cdot 10^8 \times t$$

$$\Delta t_{\text{Buzz}} = 1,0 \cdot 10^8 \text{ s} = 3,2 \text{ jaar}$$

Op de klok van Buzz is minder tijd verstreken dan op de klok van Lola. Dat de reis volgens Buzz maar 3,2 jaar duurt kun je ook berekenen met behulp van de tijdrek die Lola waarneemt van het proces dat in het stelsel van Buzz plaatsvindt.

Voor deze tijdrek geldt:

$$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$$

$$\gamma = 1,67$$

$$\Delta t_b = 5,3 \text{ jaar}$$

$$5,3 = 1,67 \times \Delta t_e$$

$$\Delta t_e = 3,2 \text{ jaar}$$

Δt_e in het referentiestelsel van Lola is dus gelijk aan de tijd Δt_{Buzz} die Buzz waarneemt in zijn referentiestelsel.

Opmerking

Lola en Buzz bewegen ten opzichte van elkaar. Lola neemt dus ook lengtekrimp waar: de raket waarin Buzz reist ziet er voor Lola verkleind uit in de bewegingsrichting. Buzz neemt ook tijdrek waar als hij een proces op aarde bekijkt.

Opgaven

- 1 Een piloot vliegt in een straaljager met een lengte van 15 meter. Stel dat hij zou kunnen vliegen met een snelheid van 50% van de lichtsnelheid.
 - a Bereken hoe lang de straaljager is volgens een waarnemer op de grond.
 - b Bereken hoe groot de snelheid van de straaljager is wanneer een waarnemer op de grond meet dat de straaljager slechts 7,5 meter lang is.
- 2 Astronaut Buzz reist met 60% van de lichtsnelheid van de aarde weg. Buzz heeft contact met een controlepost op aarde. Hij vertelt gedurende 45 seconde aan de controlepost dat alles in orde is.
 - a Bereken hoe lang de boodschap volgens de controlepost duurt.
 - b Leg uit dat zijn stem lager klinkt in de controlepost.De hartslag van astronaut Buzz is 70 slagen per minuut. Zijn hartslag wordt door de controlepost op aarde beluisterd.
 - c Bereken hoeveel slagen zijn hart per minuut maakt volgens de controlepost.

- 3 Muonen hebben een gemiddelde levensduur van 2,2 microseconde. Ze reizen door de atmosfeer met een snelheid van 99,9% van de lichtsnelheid. De atmosfeer is 10 km dik. Vanuit het referentiestelsel van de muonen beweegt de atmosfeer.
- Toon aan dat de muonen in hun stelsel een afstand van $6,6 \cdot 10^2$ m kunnen afleggen.
 - Toon aan dat door de lengtekrimp de atmosfeer voor de muonen kleiner is dan $6,6 \cdot 10^2$ m.
- 4 Een trein met een lengte van 200 meter rijdt door een tunnel met een lengte van 150 meter. In het referentiestelsel van de tunnel komt de voorkant van de trein de tunnel uit wanneer de achterkant er net in gaat.
Bereken de snelheid van de trein.
- 5 De afstand tussen de spiegels van de lichtklok op pagina 6 is d , de periode die Anita meet is T_A en de periode die Bruce meet is T_B .
- Toon aan dat de lichtklok in het stelsel van Anita een periode heeft van $T_A = \frac{2d}{c}$.
 - Toon aan dat de lichtklok in het stelsel van Bruce een periode heeft van
$$T_B = \frac{\sqrt{4d^2 + v^2 \cdot T_B^2}}{c}.$$
 - Leid uit de formules van T_A en T_B af dat geldt $T_B = \gamma \cdot T_A$.

Het ontploffen van de eerste vuurpijl tijdens oud en nieuw gebeurt op een specifieke plaats en een specifieke tijd. Het is een gebeurtenis in de ruimtetijd die je kunt weergeven in een ruimtetijd-diagram. Wat is een ruimtetijd-diagram?



Figuur D.7

D.2 Ruimtetijd-diagram

Referentiestelsels

In een **ruimtetijd-diagram** kun je tegelijkertijd laten zien hoe een stilstaande waarnemer en een bewegende waarnemer verschijnselen ervaren. Daarvoor moet je eerst meer weten van referentiestelsels.

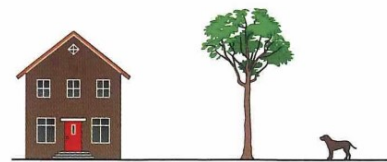
In figuur D.8 weet je niet waar het huis zich bevindt ten opzichte van de boom: er is geen assenstelsel aangegeven. In figuur D.9 is dat wel het geval: de voordeur bevindt zich 8 meter links van de boom.

In feite bevestig je een assenstelsel aan de boom, met de boom in de oorsprong. Zo'n stelsel noem je een **referentiestelsel**: de boom is in dit geval de referentie voor alle plaatsen. Omdat het huis niet beweegt ten opzichte van de boom, bevindt het huis zich in het ruststelsel van de boom.

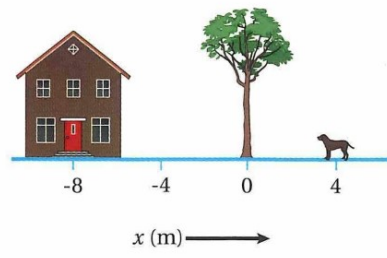
Als de hond gaat lopen, verandert zijn plaats ten opzichte van de boom. In figuur D.10 zie je de hond 10 seconden later. Zijn snelheid is dus

$$\frac{-12 - (+4)}{10} = -1,6 \text{ m/s.}$$

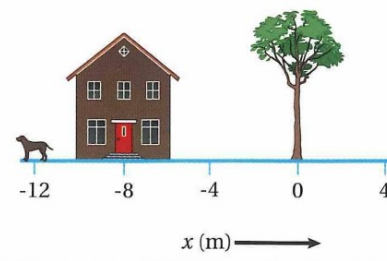
Het minteken geeft aan dat de hond naar links is gelopen. De hond beweegt zich ten opzichte van het ruststelsel van de boom.



Figuur D.8



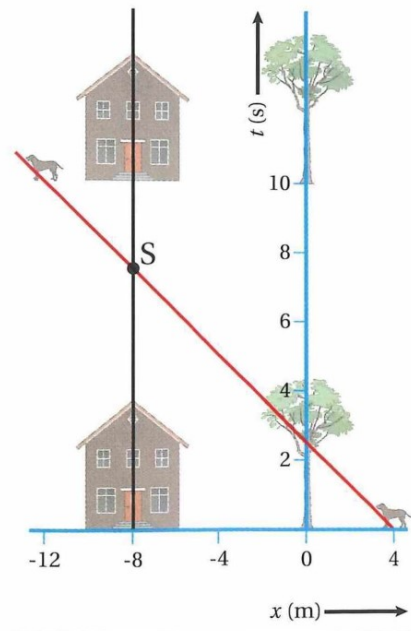
Figuur D.9



Figuur D.10

In figuur D.11 zie je het ruimtetijd-diagram van de beweging van de voordeur en de hond in het referentiestelsel van de boom. Dit diagram toont hoe de boom de ruimtetijd 'waarneemt'. De ruimte is horizontaal uitgezet en de tijd verticaal. Je ziet dat de voordeur niet beweegt ten opzichte van de boom: de zwarte grafiek loopt evenwijdig aan de blauwe lijn. De hond beweegt wel ten opzichte van de boom: de rode grafiek loopt schuin. Bereken je $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ dan is de uitkomst weer $-1,6 \text{ m/s}$.

De rode, de zwarte en ook de blauwe lijn zijn voorbeelden van **wereldlijnen**. Een wereldlijn beschrijft de beweging van een voorwerp in een referentiestelsel.



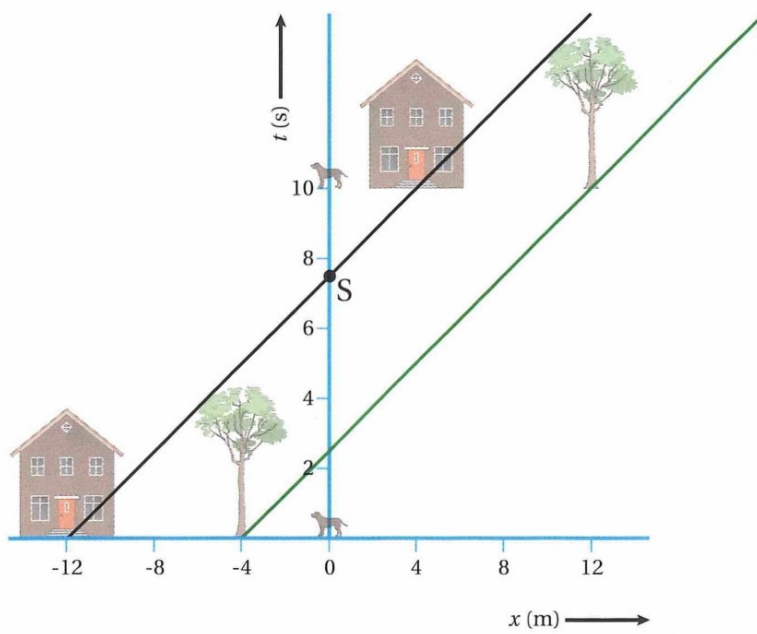
Figuur D.11

Gebeurtenis

Een punt in een ruimtetijd-diagram noem je een **gebeurtenis**. De gebeurtenis 'De hond loopt voorbij de voordeur' is in figuur D.11 het snijpunt S van de rode en de zwarte lijn.

In het referentiestelsel van de hond ziet het ruimtetijd-diagram er uit zoals in figuur D.12. Je ziet dat de hond nu hoort bij alle punten waarvoor geldt $x = 0 \text{ m}$. De wereldlijn van de hond valt dus samen met de tijdas.

In figuur D.12 is de gebeurtenis 'de hond loopt voorbij de voordeur' het snijpunt S van de zwarte lijn met de tijdas. Voor de hond beweegt dus het huis. Het huis en de boom bewegen ten opzichte van de hond met dezelfde constante snelheid, zodat de



Figuur D.12

wereldlijnen van de voordeur en de boom evenwijdig lopen. Bereken je voor deze wereldlijnen $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ dan is de uitkomst +1,6 m/s. De waarde is dezelfde maar nu positief. Dit komt omdat het huis en de boom ten opzichte van de hond naar rechts bewegen.

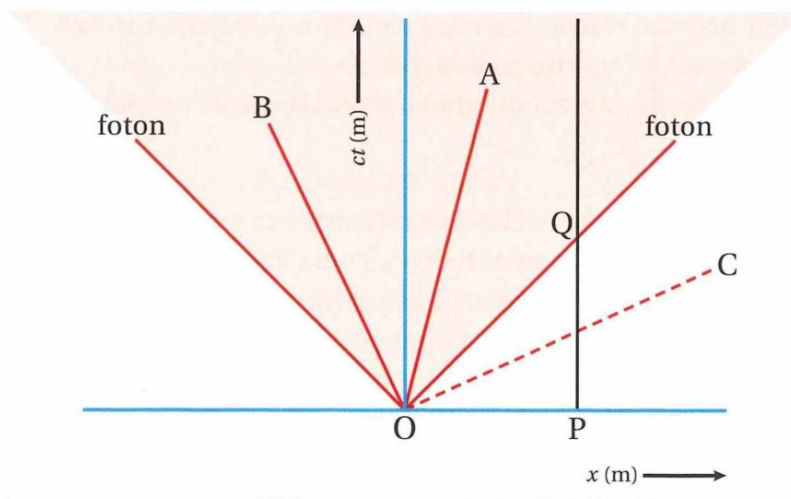
Lichtkegel

Als een voorwerp niet beweegt ten opzichte van een referentiestelsel, is de wereldlijn van dat voorwerp evenwijdig aan de tijd-as. Hoe sneller een voorwerp beweegt, des te groter is de hoek tussen de wereldlijn en de tijd-as. Het is niet mogelijk om sneller te bewegen dan de lichtsnelheid. De wereldlijn van een foton valt in het ruimtetijd-diagram van figuur D.12 vrijwel samen met de horizontale as. Om zo'n wereldlijn goed zichtbaar te kunnen weergeven in een ruimtetijd-diagram, vermenigvuldig je de eenheid van de tijd-as met de lichtsnelheid c . De grootte langs de verticale as is dan ct met als eenheid m, omdat je snelheid vermenigvuldigt met tijd.

Voor een foton in de oorsprong dat in positieve richting beweegt, geldt: $x = c \cdot t$.

De waarde van x en de waarde van ct van het foton zijn dus gelijk aan elkaar.

De wereldlijn van een foton is dus een rechte lijn door de oorsprong onder een hoek van 45° . Zie figuur D.13.



Figuur D.13

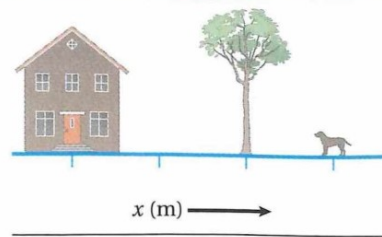
In figuur D.13 zie je ook de wereldlijnen van een aantal voorwerpen. A heeft de laagste snelheid. De wereldlijn van C is onmogelijk: de snelheid van C zou groter zijn dan die van het foton. De twee fotonen die in de oorsprong naar links en naar rechts bewegen, geven aan wat een waarnemer in de oorsprong O kan waarnemen. Het gebied tussen de wereldlijnen van de fotonen noem je de **lichtkegel** van de waarnemer in de oorsprong.

In figuur D.13 stelt gebeurtenis P het begin van een concert voor. De waarnemer in O kan niet bij het begin van het concert zijn, want gebeurtenis P valt buiten zijn lichtkegel. Gebeurtenis Q geeft het moment aan dat een foton vanuit O het concert met de lichtsnelheid passeert. De waarnemer in O kan slechts de zwarte wereldlijn bereiken boven Q. Dat betekent dus dat hij pas bij het concert kan zijn als het al een tijdje bezig is.

De waarnemer in O kan dus niet bij alle gebeurtenissen zijn in de ruimtetijd. De waarnemer in O kan alleen aanwezig zijn bij gebeurtenissen die zich binnen de lichtkegel van de waarnemer in O bevinden.

Opgaven

- **werkblad** 6 Figuur D.14 is het begin van een ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van het huis. De afstand tussen het huis en de hond is 12 m. De hond loopt naar links met een constante snelheid van 1,6 m/s. In figuur D.14 ontbreken de verticale as, het as-bijchrift en de wereldlijnen van de hond en van de boom.



Figuur D.14

Maak het ruimtetijd-diagram van figuur D.14 af.

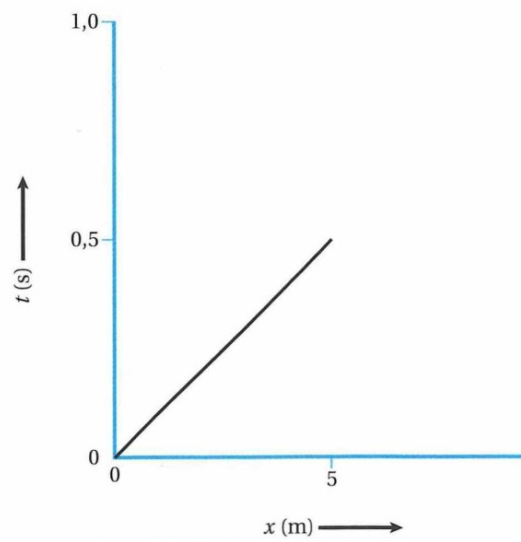
- 7 Een luipaard ligt achter een bosje en ziet een antilope. De luipaard en de antilope beginnen te rennen met constante snelheid. De luipaard is sneller dan de antilope en krijgt haar te pakken.
- Schets het ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van het bosje en teken daarin de wereldlijnen van de luipaard en de antilope.
 - Schets het ruimtetijd-diagram van de antilope en teken daarin de wereldlijnen van het bosje en de luipaard.

- **werkblad** 8 Ramon gooit een tennisbal met een snelheid van 10 m/s naar een muur die zich 5 meter van hem af bevindt. Aimee staat naast Ramon. Zodra Ramon de bal gegooid heeft, rent ze naar de muur met een snelheid van 3 m/s. Als ze de bal bereikt, vangt ze deze en stopt ze direct met rennen.

In het referentiestelsel van Ramon is in figuur D.15 de beweging van de bal tot aan de muur getekend. Neem aan dat de bal na het stuiten tegen de muur met dezelfde snelheid beweegt. Neem aan dat Aimee op dezelfde plaats staat als Ramon.

- Teken de beweging van Aimee in het ruimtetijd-diagram van Ramon.
- De gebeurtenis 'Aimee vangt de bal' noem je V.

- Construeer gebeurtenis V.
- Schets het ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van de tennisbal met de wereldlijnen van Aimee en Ramon en geef daarin gebeurtenis V aan.



Figuur D.15

9 Op het moment dat je in Nederland de zon achter de horizon ziet verdwijnen, is de zon in feite al 8 minuten onder.

a Toon dat aan met behulp van gegevens uit BINAS.

Bij nieuwe maan bevindt de maan zich tussen de zon en de aarde. Stel je staat op de maan en je neemt de gebeurtenis 'de zon gaat onder in Nederland' waar.

b Leg uit of je deze gebeurtenis eerder of later waarneemt dan mensen in Nederland.

► **werkblad** 10 Een supernova is het verschijnsel wat je waarneemt als een ster explodeert. In 1604 was een supernova met het blote oog waar te nemen. De explosie vond plaats op een afstand van $2,0 \cdot 10^3$ lichtjaar.

a Bereken in welk jaar deze supernova plaatsvond.

Bij sommige supernova's blijft een neutronenster over op de plek van de zware ster. In figuur D.16 is de zwarte lijn de wereldlijn van een supernova in het ruimtetijd-diagram van een waarnemer op de aarde. Gebeurtenis A is het begin van de explosie en gebeurtenis B is het ontstaan van de neutronenster.

Het is theoretisch onmogelijk voor de waarnemer om de supernova van 1604 mee te maken.

b Leg dit uit met behulp van de lichtkegel van een waarnemer in de oorsprong.

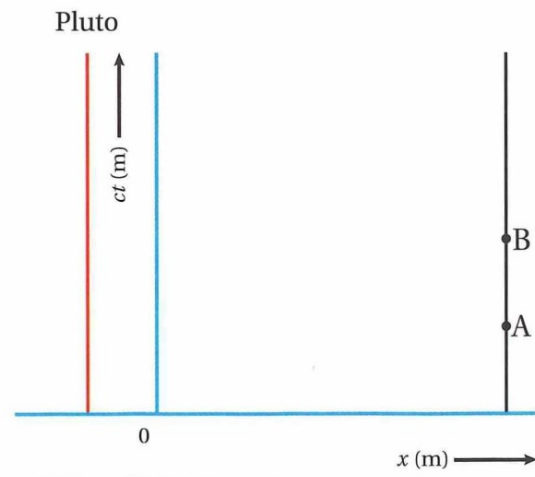
c Leg aan de hand van het ruimtetijd-diagram uit dat de zware ster al een neutronenster is op het moment dat de supernova op aarde wordt waargenomen.

De wereldlijn van Pluto geeft aan dat Pluto tijdens de supernova er verder vanaf staat dan de aarde.

d Leg uit dat een waarnemer op Pluto de supernova later waarneemt.

Voor een waarnemer op Pluto duurt het bestaan van de supernova even lang als voor een waarnemer op aarde.

e Leg dit uit met behulp van lichtkegels.



Figuur D.16

Soms slaat de bliksem op twee plaatsen tegelijkertijd in. Toch zal niet iedereen de twee inslagen tegelijkertijd waarnemen. Hoe komt dat?

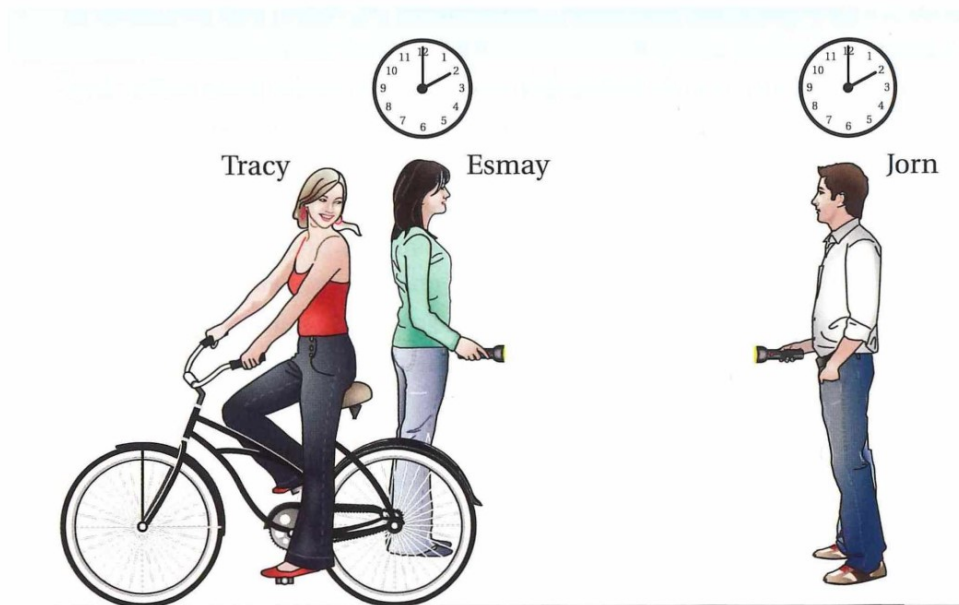


Figuur D.17

D.3 Gelijktijdigheid

Ruimtetijd-diagram en gelijktijdigheid

In figuur D.18 zie je drie waarnemers: Tracy, Esmay en Jorn. Tracy beweegt naar links terwijl Esmay en Jorn stilstaan.



Figuur D.18

In het ruimtetijd-diagram van figuur D.19 zie je de wereldlijnen van Tracy en Jorn in het referentiestelsel van Esmay.

In figuur D.19 zie je vier gebeurtenissen:

A: Esmay zendt een lichtpuls naar Jorn.

B: Jorn ontvangt de lichtpuls en zendt direct een nieuwe lichtpuls naar Esmay.

C: Esmay ontvangt de lichtpuls van Jorn.

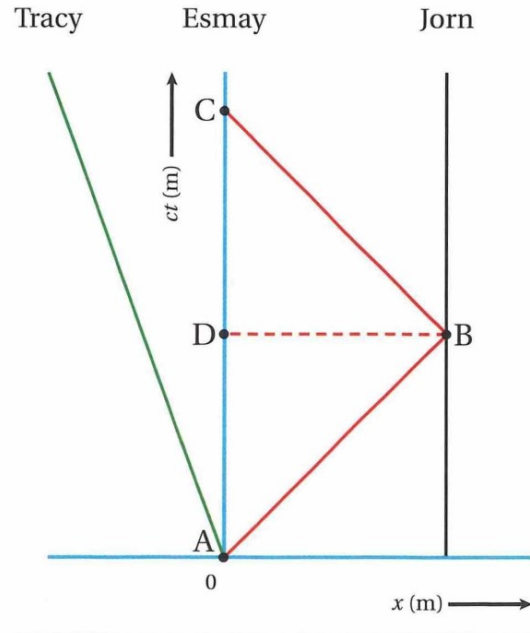
D: In figuur D.19 is ook punt D aangegeven. Dit is het tijdstip dat volgens Esmay precies tussen A en C valt.

In het stelsel van Esmay en Jorn zijn de gebeurtenissen B en D gelijktijdig. Het licht doet er even lang over om van Esmay naar Jorn te bewegen als van Jorn naar Esmay. Omdat D precies tussen A en C inligt, duurt AD even lang als DC. Alle punten op de horizontale lijn BD vinden in het stelsel van Esmay en Jorn op hetzelfde tijdstip plaats. Gebeurtenissen die **gelijktijdig** plaatsvinden liggen dus op een lijn evenwijdig aan de ruimte-as.

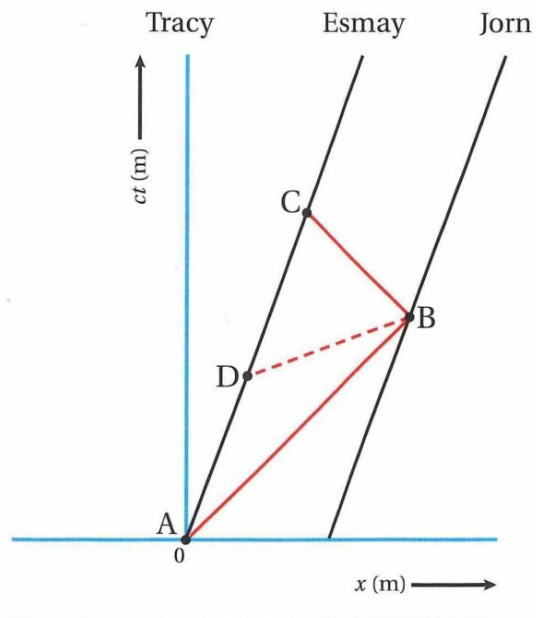
Tracy bekijkt de gebeurtenissen A t/m D. Het ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van Tracy zie je in figuur D.20. De hoek tussen de wereldlijnen van Tracey en Esmay is gelijk aan die in figuur D.19.

Gebeurtenis D ligt nog steeds precies midden tussen A en C in. De wereldlijn van het foton dat van A naar B gaat, loopt nog steeds onder een hoek van 45° met de tijdas omdat de lichtsnelheid voor Tracy dezelfde is als voor Esmay en Jorn. Hetzelfde geldt voor de wereldlijn BC.

Voor Tracy is de lijn DB niet evenwijdig aan de ruimte-as. Voor Tracy zijn de gebeurtenissen B en D dus niet gelijktijdig. Gebeurtenis D vindt volgens Tracy eerder plaats dan gebeurtenis B.



Figuur D.19



Figuur D.20

Doordat Tracy beweegt ten opzichte van Esmay en Jorn, is gelijktijdigheid voor Tracy niet hetzelfde als voor Esmay en Jorn.

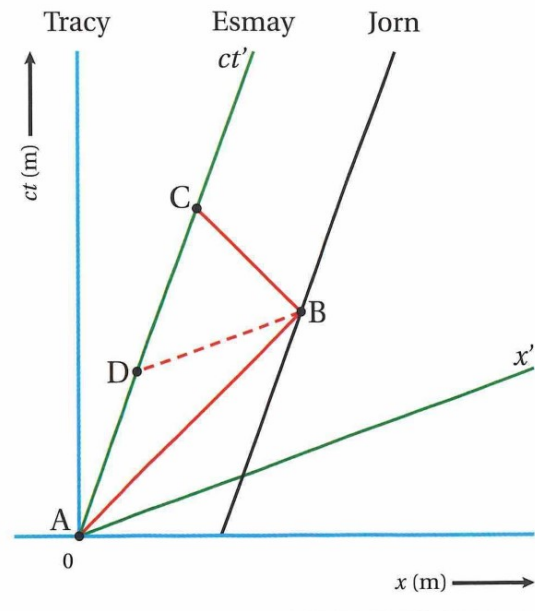
In het dagelijks leven merk je hier echter niets van doordat het verschil in gelijktijdigheid verwaarloosbaar klein is. Dat komt doordat de snelheden waarmee je beweegt op aarde veel kleiner zijn dan de lichtsnelheid. Pas wanneer snelheden in de orde van grootte van de lichtsnelheid zijn, moet je ermee rekening houden dat gelijktijdigheid alleen maar kan bestaan voor waarnemers die stilstaan ten opzichte van elkaar.

Ruimtetijd-diagram met stilstaande en bewegende waarnemer

Je kunt in één ruimtetijd-diagram een tweede assenstelsel tekenen om daarmee ook het referentiestelsel van een bewegende waarnemer weer te geven. Dit assenstelsel heeft een ct' -as en een x' -as.

Figuur D.20 is het ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van Tracy. Je voegt als volgt het referentiestelsel van Esmay eraan toe. Daarbij gebruik je figuur D.19. Gebeurtenissen D en C liggen in figuur D.19 op de ct -as van Esmay. Dus de ct' -as voor Esmay ligt op de lijn door de gebeurtenissen D en C. Zie figuur D.21.

Tracy weet dat gebeurtenis B en D in het stelsel van Esmay gelijktijdig zijn. In figuur D.19 zie je dat de lijn door de gelijktijdige gebeurtenissen B en D voor Esmay evenwijdig loopt aan de ruimte-as. Dus loopt de x' -as van Esmay evenwijdig aan de lijn BD. Zie figuur D.21. De groengekleurde lijnen zijn dus de assen x' en ct' van het referentiestelsel van Esmay. De tijdas ct' en de ruimteas x' van Esmay maken een even grote hoek met de assen ct en x van Tracy. Ook uit figuur D.21 blijkt dat twee gebeurtenissen die voor de ene waarnemer gelijktijdig plaatsvinden, voor een ander niet gelijktijdig kunnen zijn.

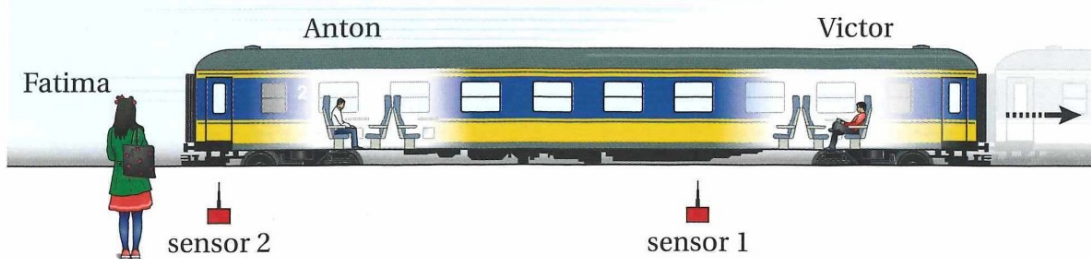


Figuur D.21

Voorbeeld

Fatima onderzoekt gelijktijdigheid bij een snelle trein. In de wagon zitten Anton en Victor. Victor zit voorin de wagon en Anton zit achterin. Fatima heeft twee sensoren langs het spoor geplaatst. De sensoren registreren het tijdstip waarop Anton of Victor passeert. Fatima staat zelf bij sensor 2. Op $t = 0$ bereikt Victor sensor 2.

In het stelsel van Fatima blijkt het tijdstip waarop Victor sensor 1 passeert hetzelfde te zijn als het tijdstip waarop Anton sensor 2 passeert. In figuur D.22 zie je een schematische weergave van deze situatie in het referentiestelsel van Fatima.



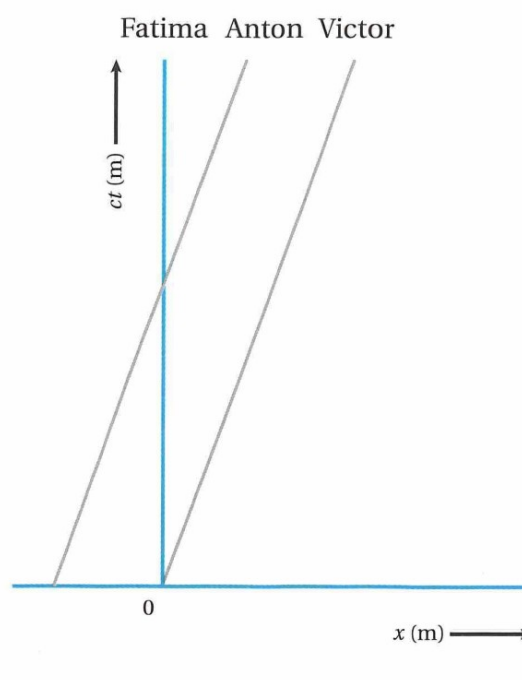
Figuur D.22

Figuur D.23 is het ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van Fatima, met de wereldlijnen van Anton en Victor.

- a Geef in figuur D.23 de volgende gebeurtenissen weer:
 A: 'Anton passeert sensor 2'
 B: 'Victor passeert sensor 1'

Anton en Victor bepalen beiden met een klok het moment waarop ze de sensoren passeren.

- b Teken in figuur D.23 de assen van het referentiestelsel van Victor.
 c Toon met behulp van figuur D.23 aan dat in het referentiestelsel van Victor het tijdstip waarop Victor sensor 1 passeert, niet gelijk is aan het tijdstip waarop Anton sensor 2 passeert.
 d Leg dit uit.



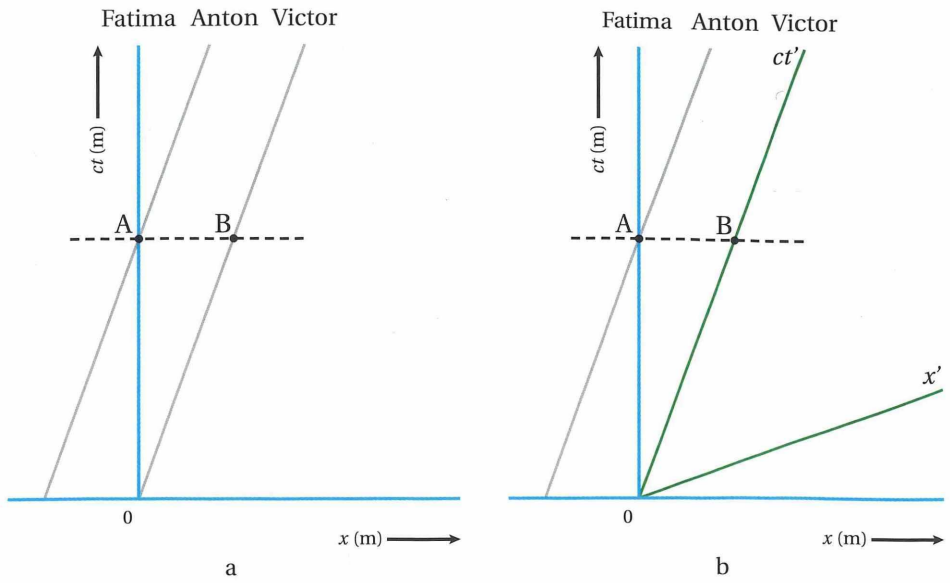
Figuur D.23

Als de wagon stilstaat, dan is de afstand tussen Anton en Victor groter dan de afstand tussen de twee sensoren.

- d Leg dit uit.

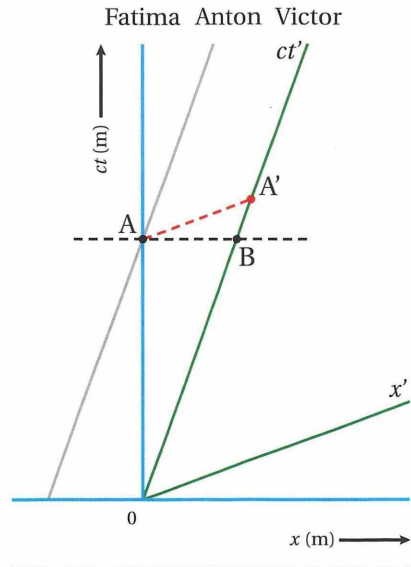
Uitwerking

- a Zie figuur D.24a. Voor gebeurtenis A geldt $x = 0$, want het valt samen met de plaats van Fatima. Dus A ligt op het snijpunt van de tijdas en wereldlijn 'Anton'. Gebeurtenis B is in het stelsel van Fatima gelijktijdig met A, dus ligt B op een horizontale lijn door A.
 b Zie figuur D.24b. De tijdas ct' van het stelsel van Victor valt samen met de wereldlijn van Victor. De hoek tussen ct' en ct is even groot als de hoek tussen x' en x .



Figuur D.24

- c Zie figuur D.25. Gebeurtenissen die in het referentiestelsel van Victor gelijktijdig zijn, liggen op lijnen evenwijdig met zijn ruimteas x' . De lijn AA' loopt evenwijdig aan de ruimteas x' . Gebeurtenis A is het moment waarop Anton sensor 2 passeert. Victor zal zeggen dat gebeurtenis A gelijktijdig plaatsvindt met gebeurtenis A' . Dus in het stelsel van Victor vindt gebeurtenis B eerder plaats dan gebeurtenis A.
- d In het referentiestelsel van Fatima is de afstand tussen de sensoren even groot als de afstand tussen Anton en Victor. De trein beweegt echter ten opzichte van Fatima. Er is dan sprake van lengtekrimp. Volgens Fatima is dus de afstand tussen Anton en Victor tijdens de beweging van de trein kleiner dan bij stilstand van de trein.



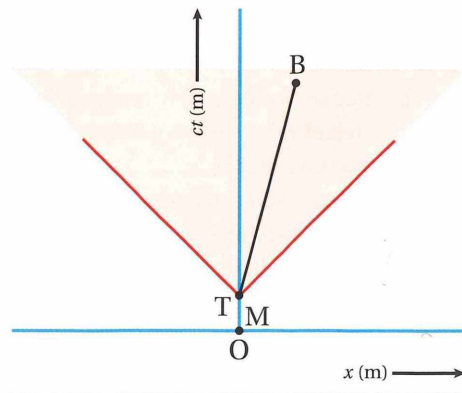
Figuur D.25

Opmerking

De snelste treinen halen een snelheid van 430 km/h. In dat geval is de hoek tussen de twee ruimte-assen x en x' kleiner dan tienduizendste graad. De tijdas ct' van Victor loopt dan vrijwel verticaal. De gebeurtenissen A' en B vallen dan vrijwel samen en dan is het verschil in gelijktijdigheid dus verwaarloosbaar klein.

Oorzaak en gevolg

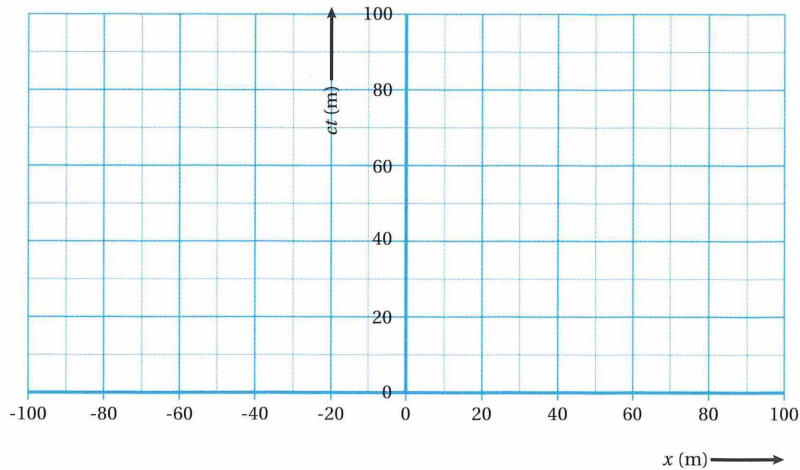
Als een schutter met een geweer een bierfles wil kapot schieten dan heeft hij even de tijd nodig om te mikken. Dit is gebeurtenis M. In het referentiestelsel van de schutter vindt de gebeurtenis B 'bierfles breekt' plaats na de gebeurtenis T 'trekker overhalen'. In figuur D.26 zijn de gebeurtenis M, T en B aangegeven. De wereldlijn van de kogel verbindt gebeurtenis T met gebeurtenis B. De lichtkegel van de T bestaat uit alle gebeurtenissen die voor elke waarnemer na T plaatsvinden. De wereldlijn van de kogel valt binnen de lichtkegel van T, want de kogel heeft een kleinere snelheid dan de lichtsnelheid. Voor elke waarnemer valt gebeurtenis B binnen de lichtkegel. Dus zal voor elke waarnemer de fles pas breken nadat de trekker is overgehaald.



Figuur D.26

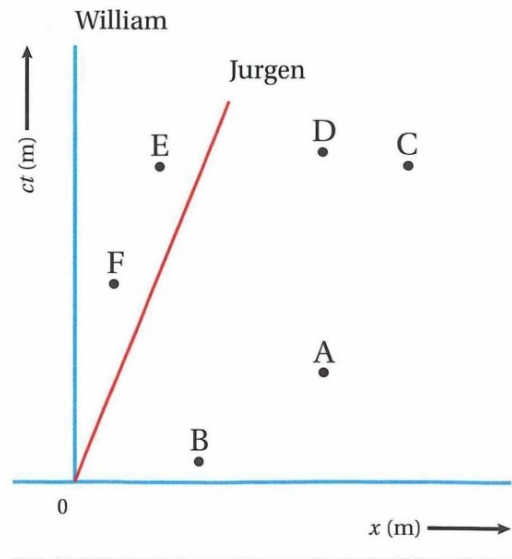
Opgaven

- **werkblad** 11 In onderstaande vragen staat telkens de plaats van een waarnemer en de snelheid waarmee hij beweegt. In figuur D.27 zie je een leeg ruimtetijd-diagram. Teken in figuur D.27 de wereldlijnen voor elke waarnemer.
- a $v = 0,1c$ en $x_0 = -60$ m
 - b $v = -0,3c$ en $x_0 = 60$ m
 - c $v = 0,8c$ en $x_0 = 30$ m
 - d $v = -0,9c$ en $x_0 = -30$ m



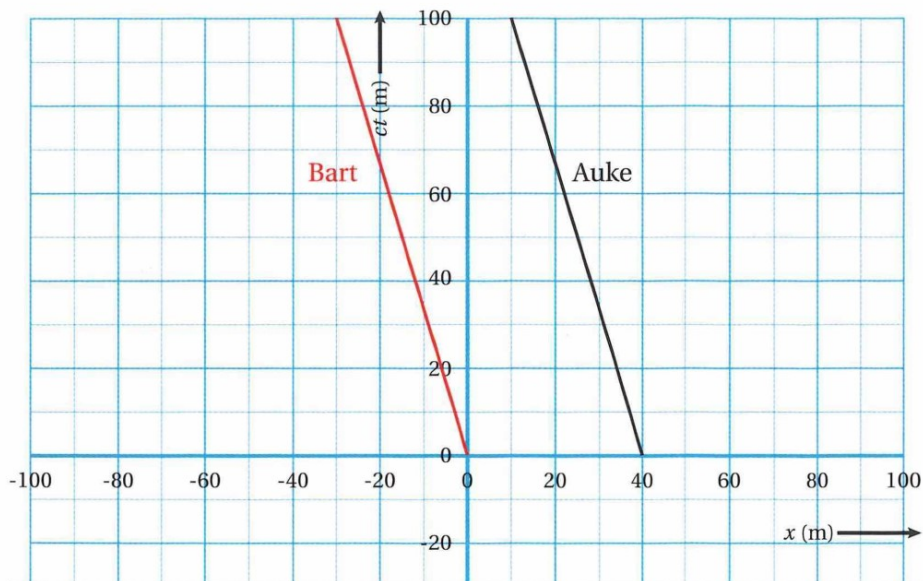
Figuur D.27

- **werkblad** 12 Figuur D.28 is een ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van William met daarin zes gebeurtenissen. Bovendien zie je de wereldlijn van Jurgen.
- Bepaal welke gebeurtenissen in het stelsel van William op dezelfde plek plaatsvinden.
 - Bepaal welke gebeurtenissen in het stelsel van William gelijktijdig plaatsvinden.
 - Bepaal welke gebeurtenissen in het stelsel van Jurgen op dezelfde plek plaatsvinden.
 - Bepaal welke gebeurtenissen in het stelsel van Jurgen gelijktijdig plaatsvinden.



Figuur D.28

- **werkblad** 13 Figuur D.29 is het ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van Yuen met de wereldlijnen van Bart en Auke.
- Bepaal de snelheid van Bart en Auke ten opzichte van Yuen.
 - Teken in figuur D.29 de x' -as van het referentiestelsel van Auke.



Figuur D.29

Op het moment dat Auke zich bevindt op $x = 30$ m slaat de bliksem in zowel boven zijn hoofd als boven het hoofd van Bart. In het referentiestelsel van Bart en Auke vonden beide inslagen tegelijkertijd plaats.

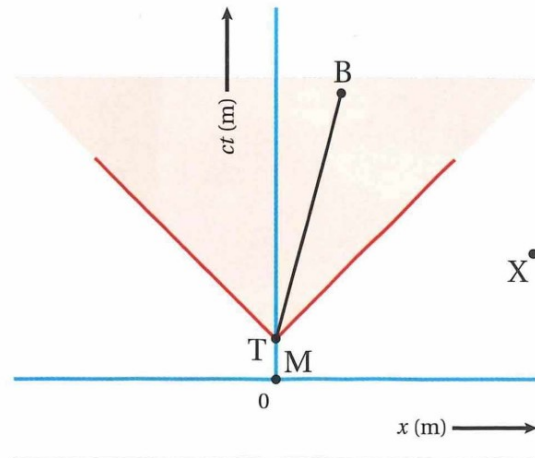
- Geef in figuur D.29 in het referentiestelsel van Bart en Auke de inslag boven Auke weer met A en boven Bart met B.
- Leg uit dat in het referentiestelsel van Yuen de twee inslagen nooit tegelijkertijd hebben kunnen plaatsvinden.

- **werkblad** 14 Een schutter bevindt zich op 80 m van een bierfles. Hij schiet een kogel af met een snelheid van 27% van de lichtsnelheid.

a Bereken hoelang het duurt voordat de kogel de bierfles bereikt.

In figuur D.30 is de gebeurtenis 'trekker overhalen' aangegeven met de letter T. De gebeurtenis 'bierfles breekt' is aangegeven met de letter B.

b Bereken de afstand die de kogel in het referentiestelsel van de kogel aflegt voordat hij de bierfles bereikt.



Figuur D.30

Een tweede schutter beweert dat de eerste schutter miste en dat hij zelf degene was die de fles kapot schoot. De gebeurtenis 'de tweede schutter haalt zijn trekker over' is aangegeven met de letter X.

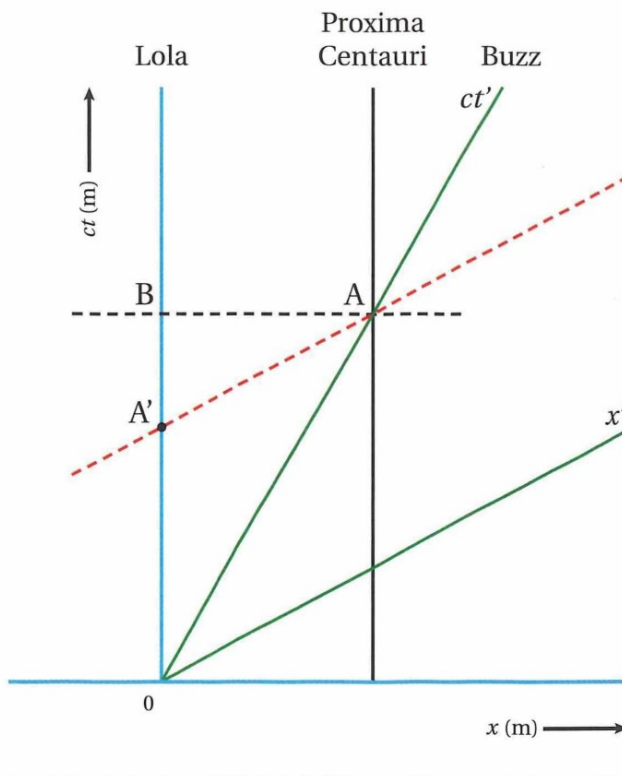
c Bepaal of de tweede schutter gelijk kan hebben.

- **werkblad** 15 Astronaut Buzz reist naar de ster Proxima Centauri met een snelheid van 80% van de lichtsnelheid. Zijn zus Lola neemt de reis vanaf de aarde waar. De reis duurt in het referentiestelsel van Lola 5,3 jaar. Figuur D.31 is het ruimtetijd-diagram van de reis van Buzz in het referentiestelsel van Lola.

Gebeurtenis A is het moment dat Buzz aankomt bij Proxima Centauri.

Gebeurtenis B is het moment in het referentiestelsel van Lola waarop Buzz aankomt bij Proxima Centauri.

- a Leg uit dat gebeurtenis A en B volgens Lola gelijktijdig zijn.
- b Leg uit dat gebeurtenis A en A' volgens Buzz gelijktijdig zijn.
- c Leg aan de hand van figuur D.31 uit dat de reistijd in het referentiestelsel van Buzz kleiner is dan 5,3 jaar.



Figuur D.31

Bij een supernova komt veel energie vrij. Daarmee krijgen deeltjes een zeer grote kinetische energie. Waarom kan een deeltje bij voortdurende toevoer van energie toch nooit sneller gaan dan het licht?



Figuur D.32

D.4 Energie

Energie en massa

In BINAS tabel 7B staat dat een elektron een rustmassa heeft van (afgerond) $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg en dat daarbij 0,51 MeV of $8,2 \cdot 10^{-14}$ J aan energie hoort. Zo'n energie-waarde is de **rustenergie** van het elektron. Dit is de energie van een deeltje als het niet beweegt: het heeft dan geen kinetische energie.

De rustenergie heeft symbool E_0 en bereken je met de bekendste **formule van Einstein**. Deze geeft aan dat massa een vorm van energie is:

$$E = m \cdot c^2$$

- E is de energie in J.
- m is de massa in kg.
- c is de lichtsnelheid in m/s.

Volgens deze formule komt een massa van 1,0000 u overeen met 931,49 MeV. Deze waarde vind je terug in BINAS tabel 7.

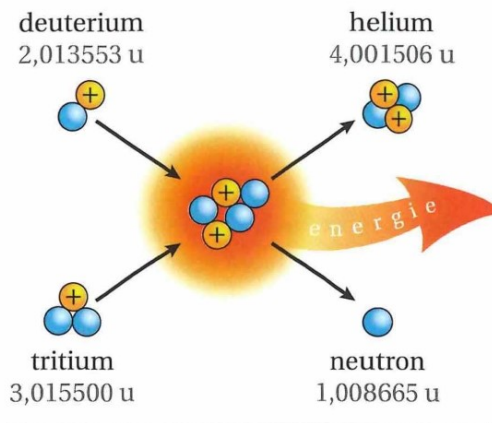
Massadefect

De zon bestaat voor het grootste deel uit isotopen van waterstof. De isotoop van waterstof die 1 proton en 1 neutron bevat noem je deuterium. De isotoop met 1 proton en 2 neutronen noem je tritium.

Binnenin de zon zijn de temperatuur en de druk zo hoog dat een kernreactie kan optreden tussen een deuteriumkern en een tritiumkern. Hierbij ontstaan een heliumkern en een neutron. In figuur D.33 zie je een schematische weergave van deze reactie.

De massa's van kernen vind je in BINAS tabel 25 als je corrigeert voor de massa van het aantal elektronen in de elektronenwolk. Daarom is de massa van een deuteriumkern gelijk aan $2,014102 - 5,486 \cdot 10^{-4} = 2,013553$ u.

Opvallend genoeg zijn de som van de massa's voor de kernreactie en na de kernreactie zijn niet gelijk aan elkaar:
 $m_{\text{voor}} = 2,013553 + 3,015500 = 5,029053$ u
 $m_{\text{na}} = 4,001506 + 1,008665 = 5,010171$ u



Figuur D.33

Er verdwijnt dus $5,029053 - 5,010171 = 0,018882$ u aan massa. Dit verschijnsel noem je het **massadefect**. De verdwenen massa is omgezet in energie. De hoeveelheid daarvan kun je berekenen met de formule van Einstein. Een snellere manier gaat met behulp van BINAS tabel 7. Daarin staan twee omrekeningsfactoren: van massa uitgedrukt in u naar MeV en naar J.

Je ziet bijvoorbeeld dat 1,00 u overeenkomt met 931,494061 MeV. Bij de kernreactie van één deuteriumkern en één tritiumkern komt dus $0,018882 \times 931,494061 = 17,588$ MeV vrij.

Kinetische energie

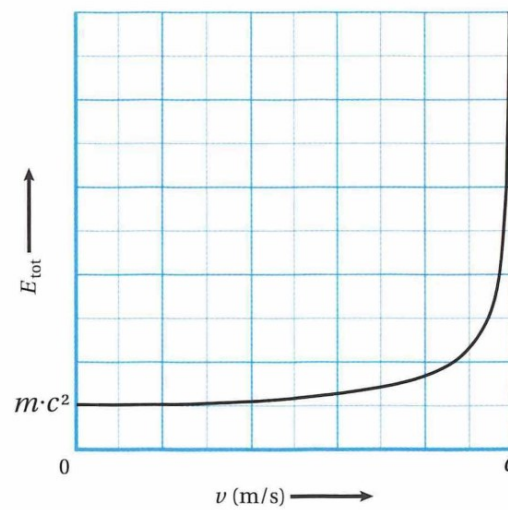
In BINAS tabel 7 staat dat een elektron een (rust)massa heeft van 0,51 MeV. Dat is dus de rustenergie van het elektron. Als het elektron beweegt, heeft het ook kinetische energie. Voor de **totale energie** geldt dan: $E_{\text{tot}} = E_0 + E_k$.

In figuur D.34 zie je de totale energie als functie van de snelheid van het deeltje. De vorm van de grafiek komt overeen met die van figuur D.6 op pagina 8.

Bij het berekenen van de totale energie speelt de relativistische factor dus een rol. Voor de totale energie van een deeltje geldt:

$$E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$$

- E_{tot} is de totale energie van een voorwerp in J.
- γ is de relativistische factor en heeft geen eenheid.
- m is de massa in kg.
- c is de lichtsnelheid in m/s.



Figuur D.34

De totale energie neemt toe als de relativistische factor groter is dan 1. Dat is het geval als een voorwerp een snelheid heeft. Deze toename van energie is de kinetische energie.

Voorbeeld

Een pion is een deeltje dat lichter is dan een proton. Het ontstaat onder andere bij de botsing tussen twee zeer snelle protonen. Een neutraal pion heeft een rustenergie van 135 MeV. Het pion beweegt met 70% van de lichtsnelheid.

- Bereken de massa van het pion.
- Bereken de kinetische energie van het pion in MeV.

Uitwerking

- De massa van het pion bereken je met de formule van Einstein.

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J (Zie BINAS tabel 5)}$$

$$E_0 = m \cdot c^2$$

$$135 \cdot 10^6 \times 1,602 \cdot 10^{-19} = m \times (2,998 \cdot 10^8)^2$$

$$m = 2,41 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

- De kinetische energie is het verschil tussen de totale energie en de rustenergie. De totale energie bereken je met de rustenergie en de relativistische factor γ .

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,7c)^2}{c^2}}} = 1,40$$

De totale energie van het pion is dus gelijk aan:

$$E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2 = 1,40 \times 135 = 189 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{tot}} = E_0 + E_k$$

$$189 = 135 + E_k$$

$$E_k = 54 \text{ MeV}$$

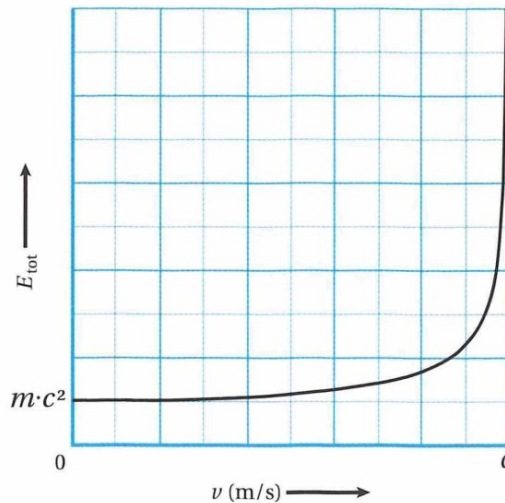
Klassieke of relativistische mechanica

De kinetische energie bereken je gewoonlijk met $E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2$. Deze manier van de kinetische energie berekenen hoort bij de **klassieke mechanica**. Ook de wetten van Newton zijn onderdeel van de klassieke mechanica. De klassieke mechanica is van toepassing op de beweging van voorwerpen die een lage snelheid hebben ten opzichte van de lichtsnelheid. Je moet dan denken aan een snelheden kleiner dan 25% van de lichtsnelheid. Zie ook figuur D.6 op pagina 8.

Aan de hand van de energie van een voorwerp bepaal je of je de klassieke mechanica kunt toepassen of dat je **relativistische mechanica** nodig hebt. Wanneer de rustenergie veel groter is dan de kinetische energie, leveren zowel de klassieke mechanica als de relativistische mechanica een correct antwoord. Komt de kinetische energie in de buurt van de rustenergie, dan moet je relativistische mechanica gebruiken. De snelheid komt dan namelijk in de buurt van de lichtsnelheid, en dan is alleen relativistische mechanica geschikt.

Opgaven

- **werkblad** 16 In figuur D.35 zie je hoe de totale energie van een deeltje afhangt van zijn snelheid.
- Schets in figuur D.35 hoe de kinetische energie van een deeltje afhangt van zijn snelheid.
 - Leg aan de hand van figuur D.35 uit dat een deeltje nooit sneller kan gaan dan het licht.



Figuur D.35

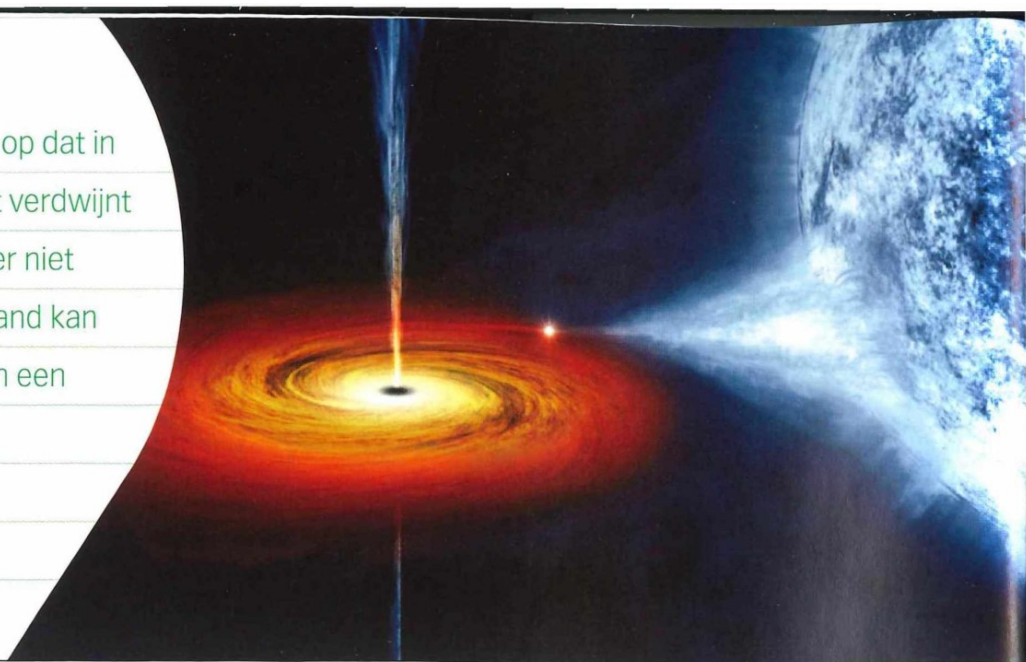
- 17 In de Large Hadron Collider worden twee protonenbundels versneld tot bijna de lichtsnelheid. Elk proton in de bundel heeft een maximale energie van 7,0 TeV.
- Toon aan dat de snelheid van de protonen (bijna) gelijk is aan de lichtsnelheid.

Elke bundel heeft een totale energie die gelijk is aan de kinetische energie van een personenauto van 1200 kg die met een snelheid van 90 km/h rijdt.

- Bereken hoeveel protonen er zich in één bundel bevinden.
- 18 Een kern HE-4 krijgt tijdens een supernova een totale energie van 3,5 nJ.
- Toon aan dat de rustenergie van een heliumkern gelijk is aan $6,0 \cdot 10^{-10}$ J.
 - Toon aan dat je de snelheid van de heliumkern moet berekenen met relativistische mechanica.
 - Bereken de snelheid van de heliumkern.
- 19 Stel dat een ruimteschip vanuit stilstand versnelt tot 20% van de lichtsnelheid.
- Bereken met hoeveel procent de totale energie van het ruimteschip toeneemt. Geef je antwoord in een significant cijfer.
- Het ruimteschip versnelt vervolgens totdat zijn totale energie verdubbeld is.
- Bereken de snelheid van het ruimteschip bij deze hoeveelheid energie.

- **hulpblad** 20 In Nederland wordt per jaar ongeveer 30 PJ energie gebruikt. Misschien is het in de toekomst mogelijk om met deuteriumkernen energie te produceren. Met deze deuteriumkernen kan de volgende kernreactie plaatsvinden:
- $${}^2_1\text{D} + {}^2_1\text{D} \rightarrow {}^4_2\text{He}$$
- Toon aan dat bij deze reactie 23,8 MeV aan energie vrijkomt. Een deel van de waterstofatomen in de natuur is een deuteriumatoom. Zie BINAS tabel 25A. Het is mogelijk om het deuteriumatoom uit een watermolekuul te isoleren.
 - Bereken hoeveel kg zeewater nodig is om genoeg deuterium te isoleren om aan het energiegebruik van Nederland te voldoen.

Een zwart gat slokt alles op dat in de buurt komt. Zelfs licht verdwijnt in een zwart gat en kan er niet uitkomen. Op welke afstand kan licht nog ontsnappen aan een zwart gat?



Figuur D.36

D.5 Zwarte gaten

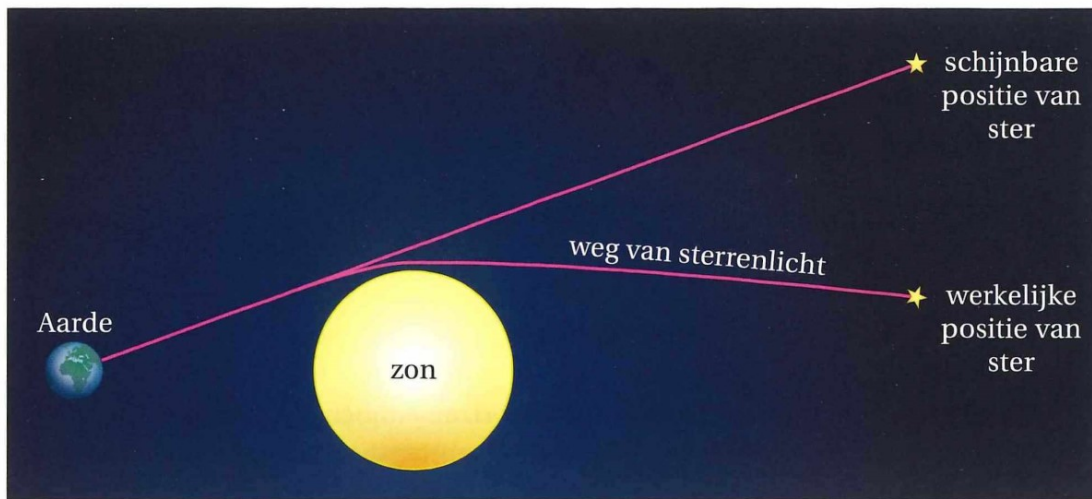
Kromme lichtstralen

In figuur D.37a zie je de stand van een aantal sterren als de aarde tussen de zon en de sterren instaat. Staat de zon tussen deze sterren en de aarde, dan zie je sommige sterren op een andere plaats. Zie figuur 37b. Dit verschijnsel is te zien tijdens een zonsverduistering.



Figuur D.37

De zon beïnvloedt de baan van het licht van de sterren. Licht dat vlak langs de zon gaat volgt een gekromde baan. Voor een waarnemer komt het licht in een rechte baan. Zie figuur B.38. Als de zon de richting van het licht van een ster beïnvloedt dan is positie aan de hemel van zo'n ster verschoven. De sterren links en rechts van de zon lijken dan verder van elkaar af te staan. Vergelijk figuur D.37b met figuur D.37a.



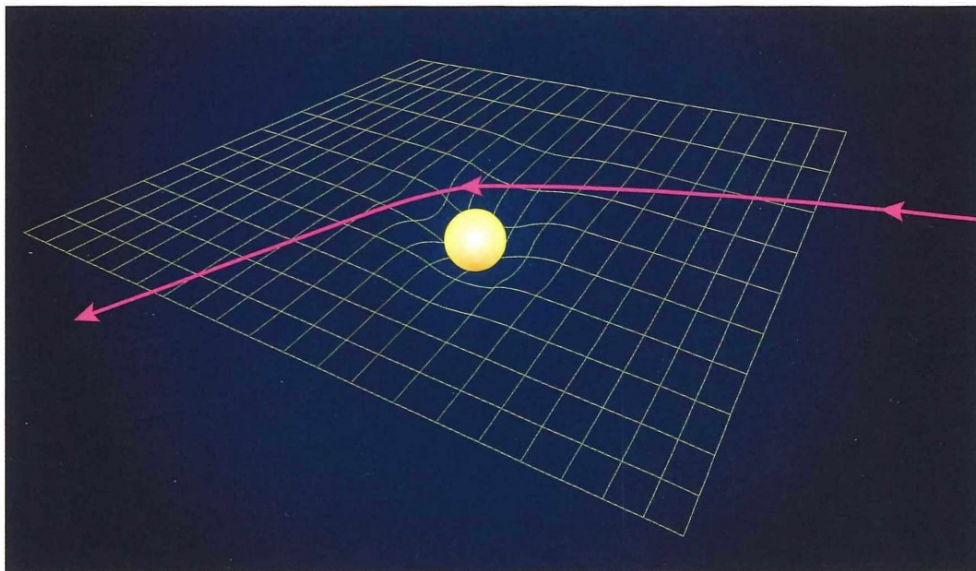
Figuur D.38

Gekromde ruimte

Volgens de gravitatiewet van Newton trekken massa's elkaar aan. De omgeving waarin de zwaartekracht merkbaar is, noem je het **zwaartekrachtveld**.

Licht bestaat uit fotonen en fotonen hebben geen massa. Toch verandert de baan van fotonen in de buurt van een grote massa. De klassieke mechanica van Newton kan dit verschijnsel niet verklaren.

De relativiteitstheorie van Einstein verklaart kromme lichtstralen door te stellen dat een zwaartekrachtveld de ruimte krom trekt. Licht volgt dan nog steeds een recht pad door de ruimte, maar de ruimte zelf is gekromd. In figuur D.39 zie je hoe de ruimtetijd gekromd is door de massa van de zon. De lichtstraal gaat daardoor de bocht om.



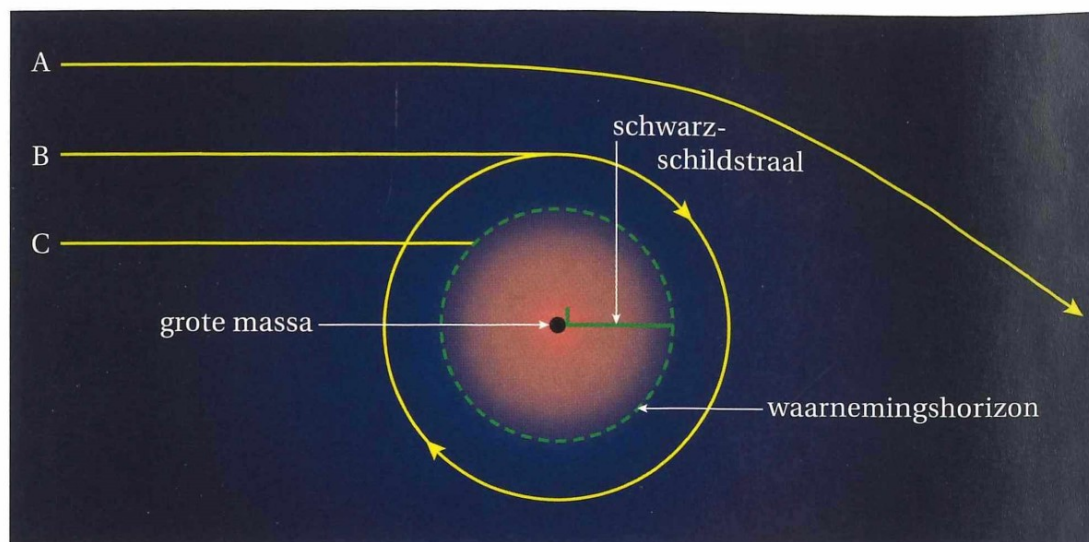
Figuur D.39

Zwart gat

Het zwaartekrachtveld van de zon kromt de baan van het licht van andere sterren. Als een zwaartekrachtveld sterk genoeg is, kan het zelfs licht invangen. Een hemellichaam waarvan het zwaartekrachtveld zo sterk is, dat het licht kan invangen heet een **zwart gat**.

In figuur D.40 zie je een schematische weergave van een zwart gat. Een zwart gat bestaat uit een zeer grote en compacte massa. De rand van een zwart gat noem je de **waarnemingshorizon**. Op deze rand is de ontsnappingsnelheid gelijk is aan de lichtsnelheid. Fotonen binnen de waarnemingshorizon kunnen deze nooit passeren. Er komt geen licht uit een gebied binnen de waarnemingshorizon, dus is het zwart.

Schwarzschildstraal



Figuur D.40

In figuur D.40 zie je drie lichtstralen. Lichtstraal A volgt een kromme baan onder invloed van het zwarte gat. De kromming van lichtstraal B is zo sterk dat het licht in een cirkelbaan rondom het zwarte gat terecht komt. Lichtstraal C wordt ingevangen door het zwarte gat.

De afstand tussen de waarnemingshorizon en de kern van het zwarte gat noem je de **schwarzschildstraal** R_s . Op de schwarzschildstraal is de ontsnappingsnelheid gelijk aan de lichtsnelheid c . Voor de ontsnappingsnelheid op het oppervlak van een hemellichaam geldt:

$$v_{\text{ontsnapping}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}$$

Op de waarnemingshorizon is $v_{\text{ontsnapping}}$ gelijk aan de lichtsnelheid c . De straal r is

$$\text{dan gelijk aan de schwarzschildstraal } R_s. \text{ Dus } c = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R_s}}.$$

Voor de schwarzschildstraal geldt dus:

$$R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$$

- R_s is de schwarzschildstraal in m.
- M is massa van het hemellichaam in kg.
- G is de gravitatieconstante in $\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$.
- c is de lichtsnelheid in m/s.

De zon heeft een massa van $1,9884 \cdot 10^{30}$ kg. Bij deze massa is de schwarzschildstraal:

$$R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2} = \frac{2 \times 6,67384 \cdot 10^{-11} \times 1,9884 \cdot 10^{30}}{(2,9979 \cdot 10^8)^2} = 2,95 \cdot 10^3 \text{ m}$$

De straal van zon is veel groter dan 2,95 km. Dus de zon is geen zwart gat en straalt licht uit. Als de zon zo sterk wordt samengeperst dat de straal kleiner wordt dan 2,95 km, kan er geen licht meer ontsnappen en is de zon een zwart gat.

Tijdrek en zwaartekracht

Een klok loopt voor ons langzamer naarmate hij zich in een sterker zwaartekrachtveld bevindt. De klok in een satelliet in de buurt van de zon loopt voor ons dus langzamer dan de klok aan het oppervlak van de aarde. Dit komt omdat het zwaartekrachtveld in de buurt van de zon sterker is dan het totale zwaartekrachtveld aan het oppervlak van de aarde.

De zwaartekracht veroorzaakt dus net als beweging tijdrek. De tijdrek door een zwaartekrachtveld van een hemellichaam bereken je met:

$$\Delta t_{zw} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

- Δt_{zw} is de tijdsduur in s, in het zwaartekrachtveld.
- Δt is de tijdsduur in s, als het zwaartekrachtveld verwaarloosbaar is.
- R_s is de schwarzschildstraal van het hemellichaam in m.
- r is de afstand tot het middelpunt van het hemellichaam in m.

Voorbeeld

Een ruimtesonde bevindt zich op een afstand van $4,500 \cdot 10^9$ m van een ster met een massa van $6,000 \cdot 10^{32}$ kg. De sonde zendt gedurende 15,00 s een boodschap naar de aarde.

Bereken hoe lang deze boodschap duurt tijdens de ontvangst op aarde.

Uitwerking

De tijd Δt bereken je met $\Delta t_{zw} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$

De schwarzschildstraal R_s bereken je met

$$R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2} = \frac{2 \times 6,67384 \cdot 10^{-11} \times 6,000 \cdot 10^{32}}{(2,9979 \cdot 10^8)^2} = 8,911 \cdot 10^5 \text{ m}$$

$$15,00 = \Delta t_e \cdot \sqrt{1 - \frac{8,911 \cdot 10^5}{4,500 \cdot 10^7}}$$

$$\Delta t = 15,15 \text{ s}$$

De boodschap duurt in het referentiestelsel van de aarde dus 0,15 s langer dan in de buurt van de ster. De invloed van het zwaartekrachtsveld van de aarde is verwaarloosbaar, omdat het zwaartekrachtsveld van de ster veel groter is dan die van de aarde.

Opgaven

- 21 Op de planeet Zarmina is misschien leven mogelijk. De straal van Zarmina is 31% van de straal van de zon. De massa van Zarmina is 29% van de massa van de zon.
- Bereken de ontsnappingsnelheid aan het oppervlak van Zarmina.
 - Bereken de schwarzschildstraal van Zarmina.

- 22 De zon heeft een schwarzschildstraal van 2,95 km. Aan het einde van haar leven zal de straal van de zon sterk toenemen.
- Verandert bij het toenemen van de straal van de zon de schwarzschildstraal van de zon? Licht je antwoord toe.

Als een middelzware ster aan het einde van zijn leven explodeert, dan blijft er een neutronenster over op de plaats van de originele ster. Een neutronenster met de massa van de zon heeft een straal van 10 km.

- Leg uit waarom deze neutronenster geen zwart gat is.

Als een neutronenster materiaal van een andere ster invangt, neemt zijn straal toe. Neem aan dat de dichtheid van een neutronenster onafhankelijk is van zijn massa. Is de straal van een neutronenster 26% groter geworden, dan is de schwarzschildstraal 2 keer zo groot.

- Toon dat aan.

Als een neutronenster voldoende materiaal heeft ingevangen, is hij een zwart gat.

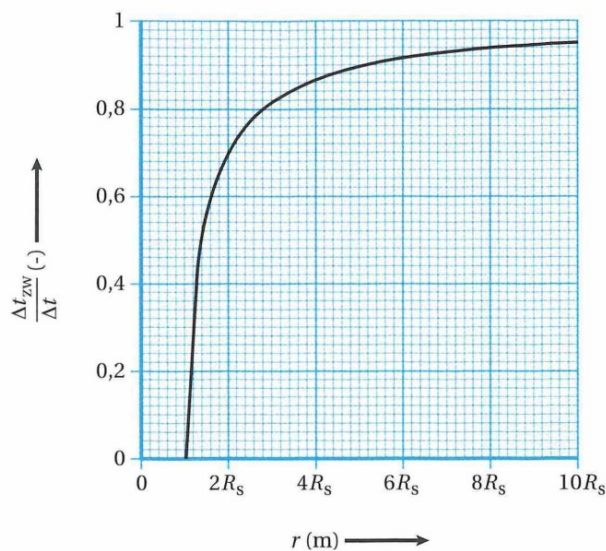
- Leg dat uit.

- **hulpblad** 23 Als de straal van een bolvormig voorwerp gelijk is aan zijn schwarzschildstraal, dan is het voorwerp *nét* een zwart gat. De dichtheid van zo'n zwart gat bereken je met:

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi \cdot G^3 \cdot M^2}$$

- Leid deze formule af.
- Bereken de minimale dichtheid van een zwart gat met een schwarzschildstraal van 1,0 cm.

- 24 Een GPS-satelliet draait rond de aarde met een snelheid van 4,0 km/s. De klok aan boord van een GPS-satelliet heeft elke dag een totale afwijking van 39 μs . De satelliet heeft vanwege zijn snelheid elke dag een tijdverschil van 8 μs .
- Leg uit of het tijdverschil door de zwaartekracht 31 μs of 47 μs is.
 - Beredeneer of de klok aan boord van de GPS-satelliet ten opzichte van ons langzamer of sneller loopt.
- 25 Als een ruimtesonde een zwart gat nadert, komt hij in een steeds sterker zwaartekrachtsveld. De verhouding tussen de tijdsintervallen gemeten in de sonde en op aarde is $\frac{\Delta t_{\text{zw}}}{\Delta t}$. In figuur D.41 is deze verhouding uitgezet tegen de afstand tot de kern van het zwarte gat.



Figuur D.41

De ruimtesonde zendt regelmatig een signaal naar de aarde met een frequentie van $6,5 \cdot 10^8$ Hz.

- Leg uit dat de gemeten frequentie van het signaal op aarde kleiner is dan $6,5 \cdot 10^8$ Hz.

Het zwarte gat heeft een massa van $6,0 \cdot 10^{35}$ kg.

Als de sonde zich op een bepaalde afstand van de kern van het zwarte gat bevindt, is de gemeten frequentie van het uitgezonden signaal op aarde gelijk aan $4,2 \cdot 10^8$ Hz.

- Bepaal op welke afstand dat het geval is.

Passeert de ruimtesonde de Schwarzschildstraal, dan wordt op aarde geen signaal meer van de ruimtesonde ontvangen.

- Leg dat uit met behulp van figuur D.41.

D.6 Afsluiting

Samenvatting

De ruimte en de tijd vormen samen de ruimtetijd. Elke waarnemer ziet een specifieke combinatie van ruimte en tijd. Dat komt doordat elke waarnemer zijn eigen referentiestelsel heeft.

De lichtsnelheid is voor alle waarnemers gelijk. Daardoor is de tijd tussen twee gebeurtenissen verschillend voor referentiestelsels die ten opzichte van elkaar bewegen. Dit leidt tot tijdrek en lengtekrimp.

Een tijdsinterval in een bewegend referentiestelsel is groter voor een waarnemer die stilstaat ten opzichte van dat referentiestelsel. Afstanden in de bewegingsrichting ziet de stilstaande waarnemer kleiner. Dit werkt ook andersom: volgens de waarnemer in het bewegend referentiestelsel beweegt namelijk de stilstaande waarnemer.

Hoe een voorwerp door de ruimtetijd beweegt, geef je weer in een ruimtetijd-diagram. Op de horizontale as is de ruimte x uitgezet en verticaal de tijd t . Zo'n diagram geldt voor een waarnemer in de oorsprong van dat diagram. De grafiek van de beweging van een voorwerp noem je de wereldlijn.

Vermenigvuldig je de tijd met de lichtsnelheid c dan is de verticale as een ct -as.

De wereldlijn van een foton maakt dan altijd een hoek van 45° met deze as. Dit kan zowel naar links als naar rechts. Teken je de twee wereldlijnen van een foton vanuit een waarnemer dan vormen deze de grenzen van de lichtkegel. Een waarnemer kan alleen gebeurtenissen zien die zich binnen de lichtkegel bevinden.

Twee gebeurtenissen noem je gelijktijdig als ze op hetzelfde tijdstip plaatsvinden. Ziet een waarnemer twee gebeurtenissen tegelijkertijd, dan bevinden die gebeurtenissen zich in zijn ruimtetijd-diagram op een lijn evenwijdig met zijn ruimte-as. Beweegt een tweede waarnemer ten opzichte van de eerste waarnemer dan zijn die twee gebeurtenissen voor hem niet gelijktijdig. De assen van het ruimtetijd-diagram van de tweede waarnemer zijn over een hoek gedraaid ten opzichte van de eerste waarnemer. De tijd-as en de ruimte-as van het referentiestelsel van de tweede waarnemer maken een even grote hoek met de overeenkomstige assen van de eerste waarnemer.

De energie van een deeltje bestaat uit rustenergie en kinetische energie. Zijn rustenergie heeft altijd dezelfde waarde. Deze energie bereken je met de formule van Einstein. De kinetische energie hangt van af de snelheid. De som van de rustenergie en de kinetische energie noem je de totale energie. Deze som kun je ook berekenen met een relativistische formule.

Bij een reactie tussen twee kernen is de massa na de reactie niet gelijk aan de massa voor de reactie. Een gedeelte van de massa is dan omgezet in energie of andersom.

Een zwaartekrachtveld beïnvloedt de ruimtetijd. Daardoor lopen klokken in een zwaartekrachtveld langzamer voor een waarnemer die nauwelijks invloed van een zwaartekrachtveld ondervindt.

Een zwaartekrachtveld laat licht van richting veranderen. Is het zwaartekrachtveld sterk genoeg, dan kan licht het zwaartekrachtveld zelfs helemaal niet verlaten. Je spreekt dan van een zwart gat.

Gegevens die betrekking hebben op dit hoofdstuk

De formules die in dit hoofdstuk besproken zijn, staan hieronder bij elkaar.

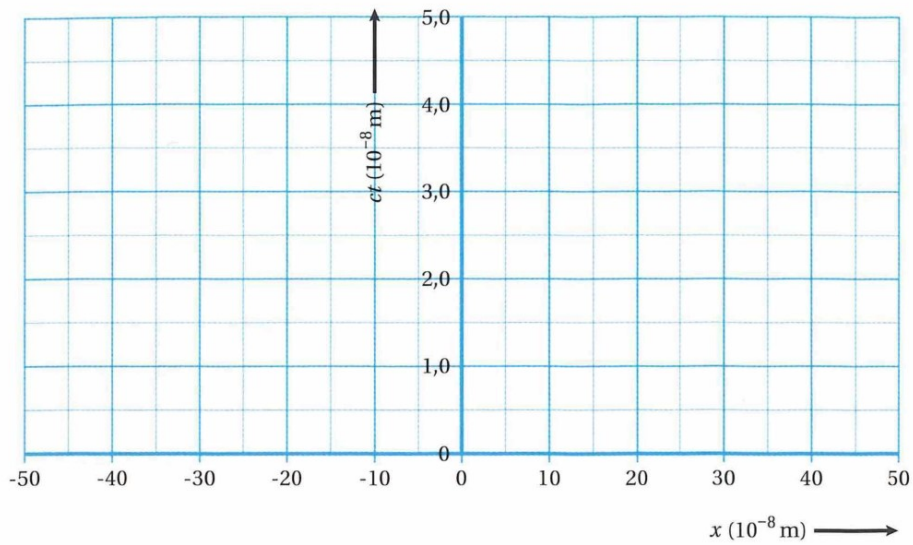
tijdrek	$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$
relativistische factor	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
lengtekrimp	$\ell_b = \frac{\ell_e}{\gamma}$
formule van Einstein	$E = m \cdot c^2$
totale energie	$E_{\text{tot}} = E_0 + E_{\text{kin}}$
totale energie	$E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$
schwarzschildstraal	$R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$
tijdrek door zwaartekrachtveld	$\Delta t_{\text{zw}} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$

De eerste vier formules vind je terug in BINAS tabel 35E E3 Kernfysica en E6 Radioactiviteit.

- **hulpblad** 26 Bij een botsing tussen twee protonen in de Large Hadron Collider (LHC) kan een neutraal pion ontstaan. De massa van een pion is 264 keer zo groot als de massa van een elektron. De totale energie van een bepaald neutraal pion is gelijk aan 210 MeV.
- a Toon aan dat de snelheid van het pion 77% van de lichtsnelheid is. Een neutraal pion kan overgaan in twee fotonen. De gemiddelde levensduur van een pion bedraagt $8,4 \cdot 10^{-17}$ s.
- b Toon aan dat het pion in het referentiestelsel van de LHC een afstand aflegt van $3,0 \cdot 10^{-8}$ m.

Figuur D.42 is een leeg ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van de LHC.

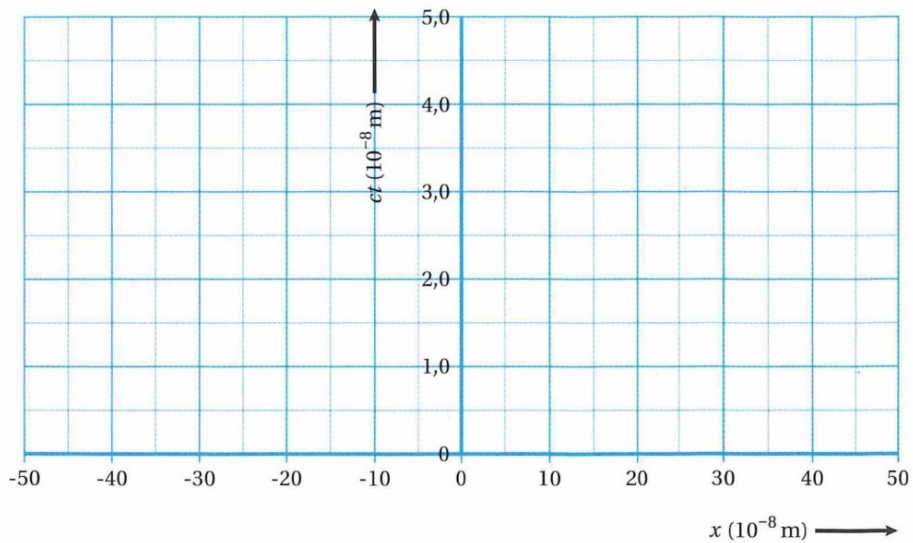
- c Teken in figuur D.42 de wereldlijn van het pion en de wereldlijnen van de twee fotonen die ontstaan. Neem aan dat het pion in de oorsprong is ontstaan.



Figuur D.42

Figuur D.43 is een leeg ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van het pion.

- d Teken in figuur D.43 de wereldlijn van het pion en de wereldlijnen van de twee fotonen die ontstaan. Neem aan dat het pion in de oorsprong is ontstaan.

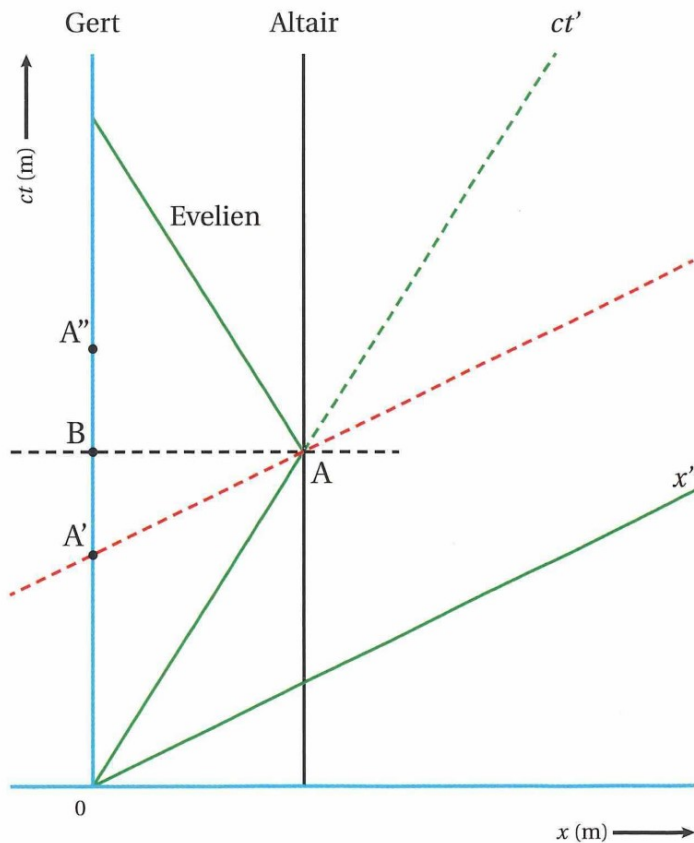


Figuur D.43

- 27 Evelien en Gert bouwen samen een raket. Evelien is 27 jaar en Gert is 19 jaar. Evelien reist met de raket naar de ster Altair en keert direct terug naar aarde. Neem aan dat de raket een constante snelheid heeft van $0,80c$. Gert blijft achter op de aarde.
- Toon aan met behulp van BINAS tabel 32B dat de afstand tot Altair 16,7 lichtjaren is.
 - Toon aan dat de leeftijd van Gert 61 is wanneer Evelien terugkeert. Vanwege tijdrek duurde de reis van Evelien voor Gert langer dan voor Evelien zelf.
 - Bereken of Evelien bij terugkomst op aarde jonger is dan haar broer. Dit verschil in tijd volgt uit het ruimtetijd-diagram van het referentiestelsel van Gert. In figuur D.44 zie je het ruimtetijd-diagram van Gert met daarin de heen- en terugreis van Evelien.

Gebeurtenis A is het omkeren van Evelien bij de ster Altair. Vlak voordat Evelien aankomt bij Altair, zijn in het referentiestelsel van Evelien de gebeurtenissen A en A' gelijktijdig. Vlak nadat Evelien is omgekeerd, zijn in haar referentiestelsel gebeurtenissen A en A'' gelijktijdig.

- Leg uit waarom na het omkeren de gebeurtenissen A en A'' gelijktijdig zijn in het stelsel van Evelien. Construeer daartoe de ct'' -as die overeenkomt met de terugreis van Evelien.
- Geef op de ct -as van figuur D.44 het verschil in reistijd aan die Gert en Evelien waarnemen.



Figuur D.44

Register

- algemene relativiteits-
theorie 5
- ct' -as 18
- ct -as 13
- Einstein 24
- energie 24
 - kinetische energie 25
 - rustenergie 24
 - totale energie 25
- foton 5
- gebeurtenis 12
- gekromde ruimte 29
- gelijktijdigheid 17
- kinetische energie 25
- klassieke mechanica 26
- kromme lichtstralen 28
- lengtekrimp 7
- lichtkegel 13
- lichtklok 5
- massadefect 25
- mechanica 26
 - klassieke mechanica 26
 - relativistische
mechanica 26
- referentiestelsel 4, 11
- relativistische factor 6
- relativistische
mechanica 26
- relativiteitstheorie
 - algemene relativiteits-
theorie 5
 - speciale relativiteits-
theorie 4
- ruimte-as 12
- ruimtetijd 4
- ruimtetijd-diagram 11, 18
 - ct' -as 18
 - ct -as 13
 - gelijktijdigheid 17
 - oorzaak en gevolg 21
 - ruimte-as 12
 - t -as 12
 - tijdas 12
 - x' -as 18
 - x -as 12
- rustenergie 24
- ruststelsel 6
- schwarzschildstraal 30
- snelheid
 - tijdrek 5
- speciale relativiteits-
theorie 4
- t -as 12
- tijdas 12
- tijdrek
 - snelheid 5
 - zwaartekracht 31
- totale energie 25
- waarnemingshorizon 30
- wereldlijn 12
- x' -as 18
- x -as 12
- zwaartekracht
 - tijdrek 31
 - zwaartekrachtveld 29
- zwart gat 30

Lijst van uitkomsten

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|---|
| 1 a 13 m | 13 a $-0,3c$ | 21 a $6,0 \cdot 10^5$ m/s |
| b $0,87c$ | 14 a $9,9 \cdot 10^{-7}$ | b $8,6 \cdot 10^2$ m |
| 2 a 56 s | b 77 m | 22 a nee |
| c 56 min^{-1} | c nee | 23 b $1,6 \cdot 10^{30} \text{ kg/m}^3$ |
| 4 $0,661c$ | 17 b $3,3 \cdot 10^{11}$ | 24 a $47 \mu\text{s}$ |
| 9 b later | 18 c $0,99c$ | b sneller |
| 10 a $4,0 \cdot 10^2$ BC | 19 a 2% | 25 b $1,5 \cdot 10^9$ m |
| 12 a A+D | b $0,87c$ | |
| b C+E | 20 b $1,0 \cdot 10^6$ kg | |
| c E+F; B+D; A+C | | |
| d C+F | | |